

**COUPLAGE DE L'ACQUISITION COMPRESSÉE ET DE
L'IMAGERIE DU SPECTRE DE DIFFUSION**

par

Etienne Saint-Amant

Mémoire présenté au Département d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 15 novembre 2011



**Library and Archives
Canada**

**Published Heritage
Branch**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque et
Archives Canada**

**Direction du
Patrimoine de l'édition**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-83650-7**

**Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-83650-7**

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

Le 17 novembre 2011

*le jury a accepté le mémoire de Monsieur Étienne St-Amant
dans sa version finale.*

Membres du jury

**Professeur Maxime Descoteaux
Directeur de recherche
Département d'informatique**

**Monsieur Pierre-Marc Jodoin
Évaluateur interne au programme
Département d'informatique**

**Professeur Jean-Pierre Dussault
Président rapporteur
Département d'informatique**

Sommaire

Ce mémoire porte sur la croisée des chemins de deux technologies récentes et fascinantes : l'imagerie du spectre de diffusion et l'acquisition compressée.

L'imagerie du spectre de diffusion est issue de l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Elle permet d'observer la façon dont les molécules d'eau se déplacent dans le cerveau. Les molécules d'eau sont contraintes par la riche géométrie cellulaire des tissus cérébraux et les caractéristiques les plus probantes de cette géométrie peuvent être observées. En particulier, la diffusion est intimement liée à l'aspect fibreux de la matière blanche. L'information angulaire et l'information radiale de la matière blanche peuvent être déduites mathématiquement en analysant le signal du spectre de diffusion. À l'aide de ces informations, nous pouvons reconstruire le réseau de matière blanche du cerveau d'un patient (par tractographie) et en analyser l'intégrité (taille d'axone, démyélinisation, mort axonale). Cependant, la précision d'une technologie apporte souvent un défaut ; son temps d'acquisition en tunnel IRM est prohibitif.

L'acquisition compressée est une technologie récente, riche et complexe, issue de nombreuses branches différentes des mathématiques. Cette technologie peut s'appliquer sur l'acquisition de tous les types de signaux ou images. L'idée est d'acquérir de façon partielle les données et de résoudre un problème mathématique pour déduire quelle serait l'information complète (on déduit les données non mesurées). L'entièreté de cette technologie repose sur le principe fondamental suivant : les signaux/images d'intérêt ont la propriété d'être compressibles dans certaines bases de représentations. Cette technologie est particulièrement intéressante quand le temps d'acquisition est crucial ou que le nombre de mesures d'acquisition se doit d'être limité.

Le sujet central de ce mémoire est de combiner l'acquisition compressée à l'imagerie du spectre de diffusion pour accélérer l'examen en tunnel IRM. Pour ce faire, nous avons développé une plate-forme informatique nous permettant d'analyser et de caractériser le couplage de ces deux technologies. Nous testons en détail nos méthodes sur des données générées synthétiquement et sur des données naturelles cérébrales *in vivo*. Finalement, nous proposons une méthode d'acquisition qui ferait passer le temps

SOMMAIRE

d'acquisition de 105 minutes à 29 minutes sans trop de perte perceptuelle par rapport à l'imagerie du spectre de diffusion acquise de façon exhaustive. Nous concluons avec un ensemble de pistes de solution pour pousser encore plus loin l'accélération de l'acquisition.

Mots-clés: Acquisition compressée ; Compressed Sensing (CS) ; Imagerie du spectre du diffusion ; Diffusion Spectrum Imaging (DSI) ; seuillage ; thresholding ; résonance magnétique nucléaire ; nuclear magnetic resonance

Remerciements

Ce mémoire est l'aboutissement de presque trois années d'études de maîtrise. Que ce soit sur le plan académique ou para-académique, ces années ont été de loin les plus spectaculaires de ma vie. Neuroanatomie, anatomie cérébrale, physique quantique, physique de l'IRM, nombreuses branches des mathématiques et informatique ainsi que la science de l'imagerie sont de nombreux domaines que j'ai dû apprendre et perfectionner pour réaliser mes recherches. J'ai appris la vocation du chercheur : celui qui accepte d'être cobaye pour ses propres recherches et qui se casse les dents devant des problèmes hyper complexes !

J'ai eu la chance d'assister à la fondation du nouveau laboratoire d'imagerie médicale de l'Université de Sherbrooke dirigé par le Professeur Maxime Descoteaux. Nos images médicales suscitent déjà un grand intérêt : reportages télé ou radio, documentaires, articles, récipiendaires de nombreux prix ! En particulier, Gabriel Girard, Maxime Descoteaux et moi avons mérité le premier prix du public ainsi que le troisième prix du jury à l'édition 2011 du concours *La preuve par l'image* de l'ACFAS. Aussi, avec l'aide de mes collègues Gabriel Girard et Arnaud Boré, j'ai pu réaliser deux œuvres d'art conçues à partir d'une tractographie de la matière blanche de mon propre cerveau. Ces œuvres, qui sont modifiées aussi mathématiquement, ont été exposées à la galerie du Centre culturel de l'Université de Sherbrooke !

Un merci tout spécial au Dr. David Fortin, du CHUS, pour son invitation à assister à une neurochirurgie en bloc opératoire. Merci aussi au physicien Guillaume Gilbert, Ph.D., du CHUM, qui m'a permis de dédier mon corps à la Science en établissant un nouveau record de durée d'acquisition en tunnel IRM : j'aurais tellement dû demander un meilleur coussin ! Un grand merci au physicien Martin Lepage, Ph.D, du CHUS, qui m'a donné une formation exceptionnelle sur la physique de l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Cette formation m'a été d'une aide incommensurable pour ma compréhension fondamentale du domaine.

Merci à mes collègues du labo : Arnaud, Gabriel, Olivier, Michael, Benoit, Marc-Alexandre, Jean-Christophe, Félix et Maxime C. J'ai eu un grand plaisir à vous cô-

REMERCIEMENTS

toyer ces dernières années au labo et en dehors du labo !

Merci Maxime Descoteaux pour m'avoir montré le vrai métier de scientifique de façon rigoureuse ! Merci pour ta compréhension de ma vie tumultueuse d'artiste/scientifique. Merci de m'avoir initié à un domaine incroyablement grand, complexe et varié : le cerveau humain est l'objet le plus fascinant que nous connaissons ! C'est pour moi un honneur d'avoir été ton premier étudiant !

Finalement, j'aimerais dédier ce mémoire à Manoah, tu es mon intarissable source de motivation !

Etienne Saint-Amant

Abréviations

ACFAS	Association francophone pour le savoir
ADC	Apparent Diffusion Coefficient
CDF	Cohen-Daubechies-Feauveau
CHUM	Centre hospitalier universitaire de Montréal
CHUS	Centre hospitalier universitaire de Sherbrooke
CS	Compressed Sensing
D4	Ondelette Daubechies-4
D8	Ondelette Daubechies-8
DCT	Discrete Cosine Transform
dMRI	Diffusion Magnetic Resonance Imaging
DSI	Diffusion Spectrum Imaging
DTI	Diffusion Tensor Imaging
DWI	Diffusion Weighted Imaging
EPI	Echo Planar Imaging
FA	Fractional Anisotropy
GFA	Generalized Fractional Anisotropy
HARDI	High Angular Resolution Diffusion Imaging
IPMI	Information Processing in Medical Imaging
IRM	Imagerie par résonance magnétique
IRMd	Imagerie par résonance magnétique de diffusion
ISMRM	International Society for Magnetic Resonance in Medicine
LCR	Liquide céphalo-rachidien
MRI	Magnetic Resonance Imaging
ODF	Orientation Distribution Fonction

ABRÉVIATIONS

RIP Restricted Isometry Property
SNR Signal-to-noise Ratio
TF Transformée de Fourier
TFI Transformée de Fourier inverse
TV Total Variation

Symboles

- \mathbf{A} : Matrice dans le problème linéaire sous-déterminé du CS, $\mathbf{A} = \mathbf{R}\Phi\Psi$.
- b : Facteur-b. Il résume la pondération en diffusion DWI (temps effectif de diffusion et puissance des gradients).
- \vec{B}_0 : Le champ de l'aimant du tunnel de résonance magnétique nucléaire (puissance du champ en tesla). Les lignes de champ sont orientées dans l'axe Z (horizontal).
- \vec{B}_1 : Le champ produit par l'antenne des radiofréquences. Ce champ est habituellement dans un plan transverse à \vec{B}_0 .
- dB : Décibel.
- \mathbf{D}_k : Un tenseur de diffusion. Matrice 3×3 définie positive.
- $E(\vec{q})$: Le rapport entre le signal de diffusion $S(\vec{q})$ et l'image de base S_0 , sans pondération en diffusion ($E(\vec{q}) = S(\vec{q})/S_0$).
- $E_u(\vec{q})$: Le signal de diffusion normalisé sous-échantillonné.
- \mathbf{f} : Une image que l'on veut représenter de façon éparse ($\mathbf{f} = \Psi\mathbf{x}$).
- \mathbf{g}_i : Une direction normalisée du gradient de diffusion.
- G : Le module du vecteur du gradient de diffusion appliqué.
- \mathbf{G} : Le vecteur du gradient de diffusion appliqué.
- G_{diff} : Le gradient de diffusion. Fabriqué par combinaison linéaire des gradients G_x , G_y et G_z .
- G_x : le gradient d'encodage de fréquence. Son amplitude varie spatialement selon l'axe X .
- G_y : Le gradient d'encodage de phase. Son amplitude varie spatialement selon l'axe Y .
- G_z : Le gradient de sélection de coupe. Son amplitude varie spatialement selon l'axe Z .
- J : Dans le problème de CS, la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser.
- m : Le nombre d'éléments dans notre vecteur d'observations ($m < n$).

SYMBOLES

- M : Un sous-ensemble de tous les éléments de l'image d'intérêt. Sa cardinalité est m .
- MHz : Megahertz (million d'oscillations par seconde).
- n : Le nombre d'éléments dans l'image discrète.
- n (bis) : Dans la génération d'un signal DSI synthétique, le nombre de fibre se croisant à l'intérieur d'un voxel.
- p_k : Un terme de poids associé à une fibre synthétique.
- $P(\vec{r})$: Le propagateur de diffusion.
- $\tilde{P}(\vec{r})$: Un propagateur de diffusion estimé.
- q : Le module de \mathbf{q} .
- \mathbf{q} : Un vecteur d'onde dans l'espace- \mathbf{q} ($\mathbf{q} = \gamma \mathbf{G} \delta / 2\pi$).
- r : Le module de \mathbf{r} .
- \mathbf{r} : Une position spatiale dans \mathbb{R}^3 .
- \mathbf{R} : La matrice $m \times n$ qui extrait les coordonnées des données échantillonnées dans M .
- $\text{Rot}_{(\theta_k, \phi_k)}$: Matrice de rotation 3D selon l'orientation (θ_k, ϕ_k) .
- S : Un niveau d'éparsité.
- S_T^{doux} : La fonction de seuillage doux (non linéaire).
- S_T^{dur} : La fonction de seuillage dur (non linéaire).
- S_T^{Stein} : La fonction de seuillage Stein (non linéaire).
- S_0 : Le signal de base sans aucune pondération en diffusion.
- $S(\mathbf{q})$: Le signal de diffusion.
- T : Tesla; $3 T = 30\,000$ gauss (i.e. $60\,000$ fois le champ magnétique terrestre ressenti à la surface).
- T : La valeur du seuil.
- T_1 : Le temps requis pour que la magnétisation longitudinale retrouve environ 63 % de sa magnétisation d'équilibre. $2T_1 \approx 86\%$, $3T_1 \approx 95\%$ et $4T_1 \approx 98\%$.
- T_2 : Le temps requis pour que la magnétisation transverse retrouve environ 37 % de sa magnétisation d'équilibre (0 %). $2T_2 \approx 14\%$, $3T_2 \approx 5\%$ et $4T_2 \approx 2\%$.
- T_2^* : Comme T_2 mais il prend en compte les propriétés magnétiques des tissus et les inhomogénéités du champ magnétique. Il est plus court que T_2 .
- TF_u : Matrice issue d'une transformée de Fourier 3D sous-échantillonnée.
- \mathbf{u} : Vecteur unitaire 3D.
- \mathbf{x} : les coefficients dans une base de représentation éparse.

SYMBOLES

\mathbf{y} : les mesures d'acquisition.

\mathbf{z} : Dans le problème linéaire sous-déterminé du CS, \mathbf{z} est le terme d'erreur inconnu stochastique ou déterminée.

γ : Le rapport gyromagnétique d'un isotope atomique (en MHz/T).

δ : La durée d'application du gradient de diffusion (en ms).

δ (bis) : La fonction de Dirac : $\delta(x) = \infty$ si $x = 0$ et $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$.

Δ : Le temps séparant l'application des deux gradients de diffusion (en ms).

ϵ : En CS, constante qui délimite la quantité de bruit dans nos données.

λ : Facteur de régularisation du terme de représentation éparsé dans le problème du CS.

λ_1 : Valeur propre principale de la matrice diagonale servant à créer le tenseur de diffusion ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$).

μ : Fonction de la mesure de la cohérence.

τ : Le temps effectif de diffusion ($\tau = \Delta - \delta/3$).

ϕ_k : Fonctions d'onde formant le schéma d'acquisition. Incohérentes avec la base Ψ .

Φ : Système d'acquisition incohérent avec la base Ψ .

ψ_k : Une colonne de la base de représentation éparsé Ψ .

Ψ : Une base de représentation utilisée en CS. Cette base a pour but de rendre le signal épars.

ω_0 : La fréquence angulaire de Larmor (en MHz). Radiofréquence.

SYMBOLES

Table des matières

Sommaire	iii
Remerciements	v
Abréviations	vii
Symboles	ix
Table des matières	xiii
Liste des figures	xv
Liste des tableaux	xvii
Introduction	1
1 Imagerie par résonance magnétique	3
1.1 Résonance magnétique nucléaire	3
1.2 Acquisition	4
1.3 Exemples d'acquisition	6
1.4 Artéfacts	7
2 Imagerie par résonance magnétique de diffusion	9
2.1 Diffusion	9
2.2 Résonance magnétique et diffusion	9
2.2.1 Brève introduction à la séquence d'acquisition pondérée en diffusion	10
2.3 Facteur-b	10
2.4 Coefficient apparent de diffusion	12
2.5 Imagerie du tenseur de diffusion et imagerie de diffusion à haute résolution angulaire	13
	xiii

TABLE DES MATIÈRES

2.6	Imagerie du spectre de diffusion	17
2.7	Données DSI synthétiques	18
2.8	Visualisation 3D du propagateur de diffusion	19
2.9	Spécifications de l'acquisition	20
3	Acquisition compressée	23
3.1	Introduction à l'acquisition compressée	23
3.1.1	Sous-échantillonnage et reconstruction de l'image éparsée	24
3.1.2	Relation entre la norme et l'éparsité	25
3.1.3	Un problème linéaire sous-déterminé	26
3.1.4	Propriété d'isométrie restreinte	27
3.2	Les trois ingrédients du CS détaillés	28
3.2.1	Représentation éparsée	28
3.2.2	Schéma d'acquisition	32
3.2.3	Méthode de minimisation	33
3.3	Exemple CS sur une image 2D	37
4	Plate-forme CS-DSI	43
4.1	État de l'art en CS-DSI	43
4.2	Formulation du problème CS-DSI	45
4.3	Méthodes	46
4.3.1	Données	46
4.3.2	Interpolation	47
4.3.3	Schémas d'acquisition	47
4.3.4	Algorithmes CS	48
4.3.5	Temps de calcul	54
4.4	Résultats	54
4.4.1	Sommaire des résultats	73
	Conclusion	75
A	Sparsity Characterisation of the Diffusion Propagator (ISMRM 2011 abstract)	79
A.1	Résumé	79
A.2	Commentaires	79
B	Sparsity Characterization of the Diffusion Propagator (full paper)	81
B.1	Résumé	81
B.2	Commentaires	81
C	Liste des directions du gradient de diffusion	95

Liste des figures

1.1	Le système Philips Achieva 3T	5
1.2	Exemples d'images T_1 et T_2	7
2.1	Séquence d'acquisition DW-EPI	11
2.2	Exemples de trois images DWI	12
2.3	Carte ADC	13
2.4	Glyphes DTI, ODF et propagateur de diffusion	14
2.5	Champs de glyphes de diffusion sur une tranche coronale.	15
2.6	Tractographie	16
2.7	515 directions DSI	18
2.8	Propagateurs synthétiques	20
3.1	Boules unitaires unités selon la norme	26
3.2	Ondelette CDF 5-3	29
3.3	L'approche multirésolution de la transformée d'ondelettes	30
3.4	Seuillage dur, seuillage doux et seuillage Stein	32
3.5	Sous-échantillonnage uniforme aléatoire	34
3.6	Sous-échantillonnage radial	34
3.7	Sous-échantillonnage uniforme aléatoire avec disque de rayon 20	35
3.8	Sous-échantillonnage gaussien aléatoire	36
3.9	Exemple CS en 2D	39
3.10	Reconstruction CS en 2D	40
3.11	Les transformées d'ondelettes	41
3.12	Reconstructions CS en 2D selon l'échantillonnage	42
4.1	Schéma d'acquisition uniforme aléatoire avec boule de rayon 2, 80 % de l'espace est mesuré	48
4.2	Schéma d'acquisition uniforme aléatoire avec boule de rayon 2, 65 % de l'espace est mesuré	48
4.3	Schéma d'acquisition uniforme aléatoire avec boule de rayon 2, 50 % de l'espace est mesuré	48

LISTE DES FIGURES

4.4	Carte FA d'une tranche coronale cérébrale	71
4.5	Champs de propagateurs à divers facteurs de sous-échantillonnage pour des données naturelles cérébrales	72

Liste des tableaux

2.1	Spécifications de l'acquisition DSI	21
4.1	Résultats CS-DSI qualitatifs : 1 fibre	58
4.2	Résultats CS-DSI quantitatifs : 1 fibre	59
4.3	Résultats CS-DSI qualitatifs : 2 fibres 90°	60
4.4	Résultats CS-DSI quantitatifs : 2 fibres 90°	61
4.5	Résultats CS-DSI qualitatifs : 2 fibres 60°	62
4.6	Résultats CS-DSI quantitatifs : 2 fibres 60°	63
4.7	Résultats CS-DSI qualitatifs : 2 fibres 45°	64
4.8	Résultats CS-DSI quantitatifs : 2 fibres 45°	65
4.9	Résultats CS-DSI qualitatifs : 3 fibres 90°	66
4.10	Résultats CS-DSI quantitatifs : 3 fibres 90°	67
4.11	Résultats CS-DSI qualitatifs : 1 voxel du corps calleux	68
4.12	Résultats CS-DSI quantitatifs : 1 voxel du corps calleux	68
4.13	Résultats CS-DSI qualitatifs : 1 voxel au croisement du corps calleux et du faisceau supérieur longitudinal	69
4.14	Résultats CS-DSI quantitatifs : 1 voxel au croisement du corps calleux et du faisceau supérieur longitudinal	69
4.15	Résultats CS-DSI qualitatifs : 1 voxel du ventricule	70
4.16	Résultats CS-DSI quantitatifs : 1 voxel du ventricule	70
C.1	Liste des directions du gradient de diffusion et du facteur-b correspondant	97

LISTE DES TABLEAUX

Introduction

En imagerie médicale, pour reconstruire le système des connexions des différentes parties du cerveau humain, il existe un examen précis qui s'appelle l'imagerie du spectre de diffusion (*Diffusion Spectrum Imaging* : DSI). Ce type d'examen nous permet d'imager les fibres de la matière blanche du cerveau de façon non intrusive. Il est possible de reconstruire le réseau complet des fibres de matière blanche et d'en analyser l'intégrité (taille d'axones, démyélinisation, mort axonale, etc.). Cette analyse détaillée permet d'étudier les maladies neurodégénératives comme l'Alzheimer, le Parkinson et la sclérose en plaques. Elle permet aussi de supporter le neurochirurgien en planification préopératoire (et d'effectuer le suivi postopératoire) dans tous les cas de cancer du cerveau. Aussi, ces images sont cruciales pour mieux comprendre le développement et le fonctionnement du cerveau (comme en biologie ou en neuropsychologie). Les champs d'études sont très variés et les images issues de l'imagerie par résonance magnétique de diffusion sont de plus en plus considérées comme un outil précieux à la recherche.

Cependant, l'acquisition DSI est longue et coûteuse. Demander à un patient malade d'être immobilisé dans le tunnel de résonance magnétique nucléaire pendant 1h 45 minutes est pratiquement impensable. Le temps clinique acceptable pour un examen ne devrait pas dépasser les 30 minutes et le Graal serait d'accomplir l'acquisition en 10 minutes. Aussi, les systèmes de résonance magnétique nucléaire sont très onéreux et ils sont en utilisation permanente avec des horaires stricts.

La solution que nous envisageons est d'accélérer le temps d'acquisition d'un facteur considérable en utilisant une nouvelle technique mathématique nommée acquisition compressée (*Compressed Sensing* : CS). Il s'agit d'acquérir les données de façon partielle et de retrouver l'information complète en utilisant une astuce logique qui est fondée sur une représentation éparse de l'image dans une base et une méthode mathématique de minimisation. La durée de l'examen est fortement diminuée mais le temps de reconstruction en est augmenté. Cette reconstruction peut être faite en dehors de l'examen. Comme les ordinateurs ne coûtent qu'une fraction du coût d'un système de

INTRODUCTION

résonance magnétique nucléaire et comme notre objectif principal est de rendre les examens acceptables en temps clinique, cette stratégie est extrêmement prometteuse.

Dans ce mémoire, nous développons et analysons cette technique de CS pour le DSI. L'arrivée d'un examen d'imagerie par spectre de diffusion réalisable en temps clinique pourrait avoir un impact majeur en médecine et, nous espérons, changera la vie de plusieurs patients.

Chapitre 1

Imagerie par résonance magnétique

En médecine, l'imagerie par résonance magnétique (IRM), en anglais *Magnetic Resonance Imaging* (MRI), est une technique non intrusive et non invasive qui a pour but de visualiser les tissus à l'intérieur du corps humain. Afin de bien comprendre en quoi consiste la stratégie technologique nous permettant de réaliser cet exploit, nous devons en décortiquer les éléments essentiels.

1.1 Résonance magnétique nucléaire

D'abord, expliquons le principe de la résonance magnétique nucléaire. Soumis à un champ magnétique, les spins des protons de certains isotopes atomiques vont s'aligner naturellement en orientation parallèle ou antiparallèle aux lignes de champ. Dans un système de résonance magnétique nucléaire, nous appelons \vec{B}_0 le champ magnétique externe permanent du tunnel. La plupart du temps, nous nous intéressons à l'isotope atomique ^1H : l'hydrogène sous sa forme la plus simple. À la température du corps et dans un champ magnétique de 3 teslas (T), un surplus du nombre de spins de protons d'hydrogène correspondant à environ douze millièmes de l'ensemble des spins sera dans la direction parallèle à \vec{B}_0 [21] (i.e. pour 1 000 000 alignés antiparallèlement, nous aurons environ 1 000 024 alignés parallèlement), ce qui crée une magnétisation observable du corps dans la direction longitudinale. Un spin aligné en direction parallèle à \vec{B}_0 est dans un état quantique de faible énergie (spin *up*) tandis qu'un spin en direction antiparallèle est dans un état quantique de haute énergie (spin *down*). En émettant une fréquence radio calibrée en fonction de la puissance du champ magnétique et des propriétés gyromagnétiques de l'hydrogène, il est possible de faire entrer les spins en résonance. Cette fréquence angulaire particulière est appelée la fréquence de Larmor : un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique précesse à cette fréquence. Nous déterminons la fréquence de Larmor par l'équation $\omega_0 = \gamma B_0$, où ω_0

CHAPITRE 1. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE

est la fréquence de Larmor, γ est le rapport gyromagnétique du noyau atomique de l'hydrogène (42,576 MHz/T) et B_0 la puissance du champ magnétique. Par exemple, dans un champ magnétique de 3 T (figure 1.1), nous aurons une fréquence de Larmor pour l'hydrogène de 127,73 MHz. En résonance, la précession des spins (ceux de la population en surnombre) passe graduellement de l'orientation parallèle vers l'orientation antiparallèle en accumulant de l'énergie. Sous l'influence de la radiofréquence de Larmor, un deuxième phénomène survient : les spins se mettent en phase. À mi-chemin, la précession est orthogonale à \vec{B}_0 ; c'est ce que nous appelons l'orientation transverse. L'*impulsion radio* 90° est l'émission qui fait passer la précession des spins de la direction parallèle à la direction transverse. Étant donné que l'*impulsion radio* 90° met en phase les spins, nous pouvons observer une magnétisation transverse du corps (qui oscille à la fréquence de Larmor). L'*impulsion radio* 180° est l'émission radio (deux fois plus longue) qui fait passer la précession des spins de la direction parallèle à la direction antiparallèle (elle aussi rephase les spins).

En coupant l'émission radio, la précession des spins (équivalent à la proportion des spins en surnombre) retourne naturellement dans la direction parallèle en un temps donné. Cette période, où l'énergie accumulée du spin se dissipe peu à peu (en chaleur) pour retrouver sa direction parallèle (longitudinale), est appelée le temps de relaxation T_1 . Pour être exact, le temps T_1 est le temps requis pour retrouver environ 63 % de la magnétisation d'équilibre longitudinale. Similairement, la période, où les spins (qui viennent d'être mis en phase) se déphasent naturellement par le phénomène de relaxation spin-spin est appelée temps de relaxation T_2 . Il équivaut au temps requis pour retourner à environ 37 % de la magnétisation d'équilibre transverse (qui est 0 %). Finalement, nous considérons aussi un dernier temps de relaxation appelé T_2^* . Il est équivalent au temps T_2 sauf qu'en plus, il dépend des propriétés magnétiques des tissus et des inhomogénéités du champ magnétique. Le temps T_2^* est plus court que T_2 . Pour en savoir plus sur les temps de relaxation, nous vous invitons à consulter le livre de Bruno Kastler et al. [21]. Sur la figure 1.2, nous pouvons voir deux exemples d'images pondérées T_1 et T_2 .

Pour un proton donné, son temps de relaxation dépend de son milieu moléculaire. Cette dépendance est essentielle afin de caractériser le type de tissu dans lequel se trouvent les protons.

1.2 Acquisition

Maintenant que nous avons une idée des phénomènes magnétiques globaux se produisant à l'intérieur d'un système IRM (voir la figure 1.1), expliquons maintenant

1.2. ACQUISITION

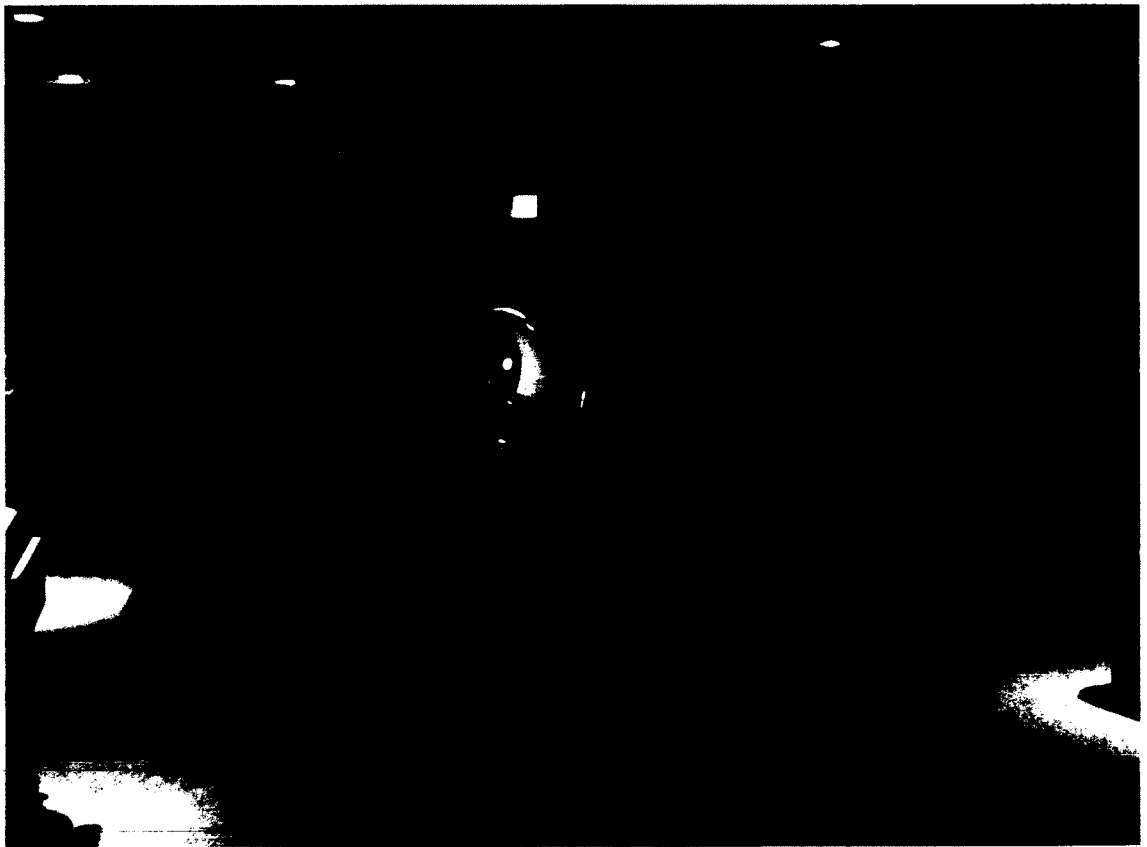


figure 1.1 – Le système Philips Achieva 3T. Photo : Guillaume Gilbert

CHAPITRE 1. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE

brièvement de quelle façon il est possible d'acquérir une image tridimensionnelle du corps.

Les systèmes IRM sont dotés d'un appareillage pouvant produire des champs magnétiques créant des variations locales de la fréquence de Larmor : ce sont les gradients. C'est en utilisant ces gradients que nous pourrions déterminer d'où provient le signal ; ceci nous permettra de former une image. Nous distinguons trois gradients : G_z , le gradient de sélection de coupe, G_y , le gradient d'encodage de phase et G_x , le gradient d'encodage de fréquence. Chaque gradient est un champ magnétique secondaire dans la direction de \vec{B}_0 mais dont la variation de sa force magnétique change spatialement selon les axes X , Y et Z . En combinant l'utilisation des impulsions des radiofréquences (90° ou 180°), des gradients et de l'antenne réceptrice (qui est la même que celle qui émet les radiofréquences), nous pouvons former une séquence d'acquisition qui a pour but d'accumuler les données. Puisque notre antenne réceptrice ne perçoit que les fréquences et amplitudes du signal, les données sont recueillies dans le domaine fréquentiel, appelé domaine de Fourier ou espace- k . Grâce à l'utilisation de la transformée de Fourier inverse (TFI), nous pouvons reconstruire une image dans le domaine spatial du corps. Nous pouvons maintenant observer l'intérieur du corps à l'aide de mesures liées au magnétisme nucléaire du proton de l'hydrogène ! Pour vous initier à la science derrière les séquences d'acquisition, nous vous invitons à consulter Kastler et al.[21] et Haacke et al.[17].

1.3 Exemples d'acquisition

Dans le cadre de nos recherches, nous nous intéressons particulièrement au cerveau humain. Sur la figure 1.2, nous voyons deux tranches axiales du cerveau de l'auteur. Sur celle de gauche, une image pondérée T_1 , nous voyons les tissus osseux (crâne) en blanc, la matière blanche en gris pâle, la matière grise en gris foncé et le liquide céphalo-rachidien (LCR) (contenu dans les ventricule) ainsi que le fond de l'image en noir. Sur celle de droite, une image pondérée T_2 , nous voyons le LCR en blanc, la matière grise en gris pâle, la matière blanche et le crâne en gris foncé et le fond de l'image en noir.

Sur ces deux images, nous ne voyons qu'une seule des tranches du volume d'intérêt (i.e. le cerveau). L'ensemble des tranches produit une image 3D. Les images 3D sont souvent observées en naviguant à travers les tranches selon trois axes. L'axe axial est l'axe supérieur-inférieur, l'axe sagittal est l'axe gauche-droite et l'axe coronal est l'axe antérieur-postérieur.

1.4. ARTÉFACTS

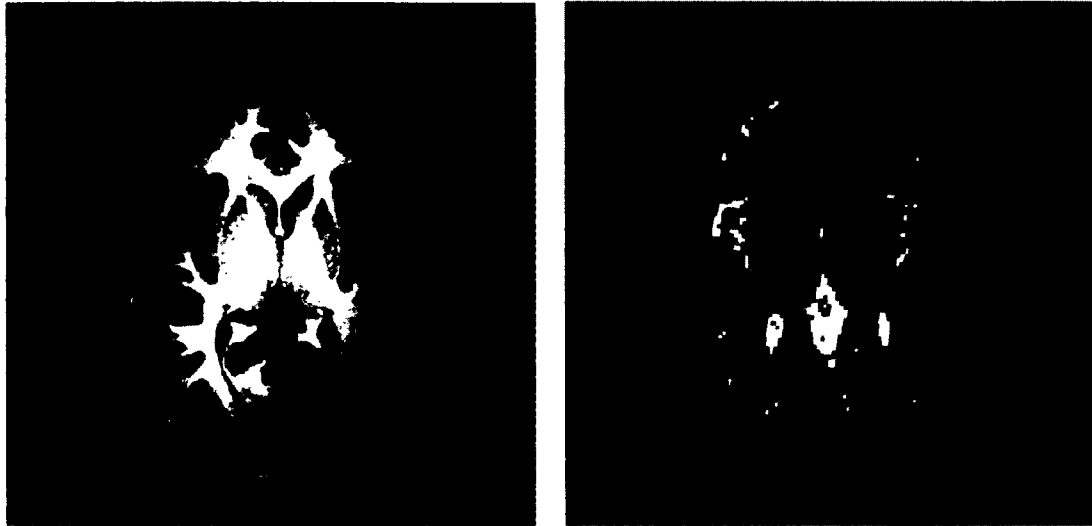


figure 1.2 – Exemples d’images pondérées T_1 et T_2 . Tranches axiales du cerveau de l’auteur. La différence de résolution provient du fait que nous avons utilisé des voxels de $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$ pour l’image pondérée T_1 (à gauche) et de $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$ pour l’image pondérée T_2 (à droite).

1.4 Artéfacts

Il est important de noter qu’un nombre important de facteurs influencent la qualité de l’image en IRM. Voici un sommaire d’artéfacts connus en IRM.

- Le mouvement (musculaire ou respiratoire) du patient causera un décalage dans l’acquisition de l’espace-k.
- La pulsation (cardiaque, sanguine, péristaltisme) peut causer des décalages dans l’encodage de phase de l’espace-k.
- Un champ de vue (*Field Of View* (FOV)) trop étroit causera un repliement spectral.
- La troncature (ou anneaux de Gibbs) est causée par une acquisition trop sommaire de la matrice de l’espace-k.
- La présence de métal dans le corps crée une distortion du champ \vec{B}_0 .
- Le phénomène de déplacement chimique (*chemical shift*) est causé par la différence de fréquence entre les protons de l’eau et ceux de la graisse.

CHAPITRE 1. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE

- L'excitation croisée est causée par le fait que le gradient de sélection de coupe n'est jamais parfait.
- Les antennes de surface font varier l'intensité du champ \vec{B}_1 en fonction de la distance créant ainsi une image avec une forte saturation près de l'antenne.
- Quand le signal de radiofréquence est trop intense pour le détecteur en un point, il survient un phénomène de bruit (*spike*).
- Chaque fois qu'un gradient est appliqué, un courant circule dans une bobine, cette variation du champ magnétique induit en retour un courant dans toute boucle métallique ou toute surface métallique, incluant dans les antennes de radiofréquences, les bobines de gradient, les composantes de l'aimant, etc. Nous appelons ce phénomène : courants résiduels (*Eddy currents*).

Chacun de ces phénomènes ont été étudiés et caractérisés ; nous invitons le lecteur à consulter Haacke et al. [17], Levitt [24], Nishimura [30] et Kastler [21]. Ces phénomènes influencent aussi l'IRM de diffusion ; il faut donc garder à l'esprit leurs implications dans les images.

Chapitre 2

Imagerie par résonance magnétique de diffusion

L'imagerie par résonance magnétique de diffusion (IRMd) permet de mesurer le phénomène de diffusion des molécules d'eau à l'intérieur des tissus. Dans le cas du cerveau, les molécules d'eau ont une forte tendance à suivre les fibres de la matière blanche. La combinaison d'un ensemble d'images pondérées en diffusion et de méthodes mathématiques nous permet de déduire et de reconstruire le réseau de matière blanche d'un individu et/ou d'en étudier l'intégrité.

2.1 Diffusion

L'eau que contient le corps est en perpétuel déplacement. Tant à l'intérieur des cellules qu'à l'extérieur de celles-ci, l'eau se diffuse en décrivant un mouvement brownien [16]. Le mouvement brownien peut être libre ou contraint. Au milieu d'un verre d'eau, les molécules d'eau diffusent librement sans préférence directionnelle : c'est un milieu isotrope. À l'opposé, des molécules d'eau contraintes par un paquet de fibres parallèles auront tendance à suivre la direction de ces fibres : c'est un milieu anisotrope. À l'instar de cet exemple, le mouvement brownien des molécules d'eau à l'intérieur du corps dépend de la structure de son environnement immédiat.

2.2 Résonance magnétique et diffusion

Le mouvement brownien de l'eau peut servir de source de contraste en IRM. Puisque les molécules d'eau se déplacent aussi pendant l'acquisition d'une image, il est possible d'isoler ce déplacement. La stratégie consiste à utiliser un gradient supplémentaire (G_{diff}) dans la séquence d'acquisition. G_{diff} est en fait une combinaison

CHAPITRE 2. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION

linéaire des trois gradients G_x , G_y et G_z qu'on utilise de part et d'autre d'une impulsion 180° . Le temps où les molécules d'eau diffusent entre les deux applications du gradient G_{diff} permet d'isoler le déplacement des molécules d'eau. La phase de ces spins (qui se sont déplacés avec la diffusion) ne sera pas revenue à zéro, ceci résulte en un déphasage et donc une diminution de la magnétisation transverse (perte de signal). En résumé, pour un G_{diff} donné, nous aurons une image avec l'information suivante : les endroits où la diffusion était forte seront plus foncés (faible signal) et les endroits où la diffusion était faible seront plus pâles (fort signal). Pour approfondir le sujet de l'IRMd, nous recommandons vivement de consulter les livres *Diffusion MRI : Theory, Methods, and Applications* [20] et *Diffusion MRI : From quantitative measurement to in-vivo neuroanatomy* [18].

2.2.1 Brève introduction à la séquence d'acquisition pondérée en diffusion

La figure 2.1 montre le schéma d'une séquence d'acquisition d'une image pondérée en diffusion. Nous appelons cette séquence DW-EPI pour *Diffusion Weighted - Echo Planar Imaging*. Cette séquence remplit l'espace-k pour une tranche axiale donnée. Lors de l'acquisition, on applique cette séquence plusieurs fois pour obtenir une série d'images 2D que nous concaténons pour obtenir une image 3D. La ligne RF indique le moment où les impulsions de radiofréquence sont appliquées. Le gradient G_z sélectionne une tranche axiale. Les gradients G_y et G_x sont utilisés pour balayer l'espace-k. La ligne du signal indique les moments où les mesures d'acquisition sont prises. Finalement, de part et d'autre de l'impulsion 180° se trouve le gradient de diffusion G_{diff} . Sur le schéma, il a été placé sur la même ligne que le gradient G_y à titre d'exemple. En général, G_{diff} est une combinaison des trois gradients G_x , G_y et G_z . Nous verrons sous peu que G , δ et Δ sont les paramètres utilisés pour calculer le facteur-b.

En résumé, pour un gradient G_{diff} donné, nous obtenons une image 3D. Pour un voxel de cette image, nous avons une mesure du déplacement des molécules d'eau. Avec plusieurs autres images pondérées en diffusion (avec des gradients G_{diff} différents), la signature du déplacement des molécules d'eau devient de plus en plus complète dans l'espace de diffusion : l'espace-q.

2.3 Facteur-b

Le facteur-b nous résume l'influence des gradients sur les images pondérées en diffusion (*Diffusion Weighted Imaging* (DWI)). Plus sa valeur est élevée, plus le poids

2.3. FACTEUR-B

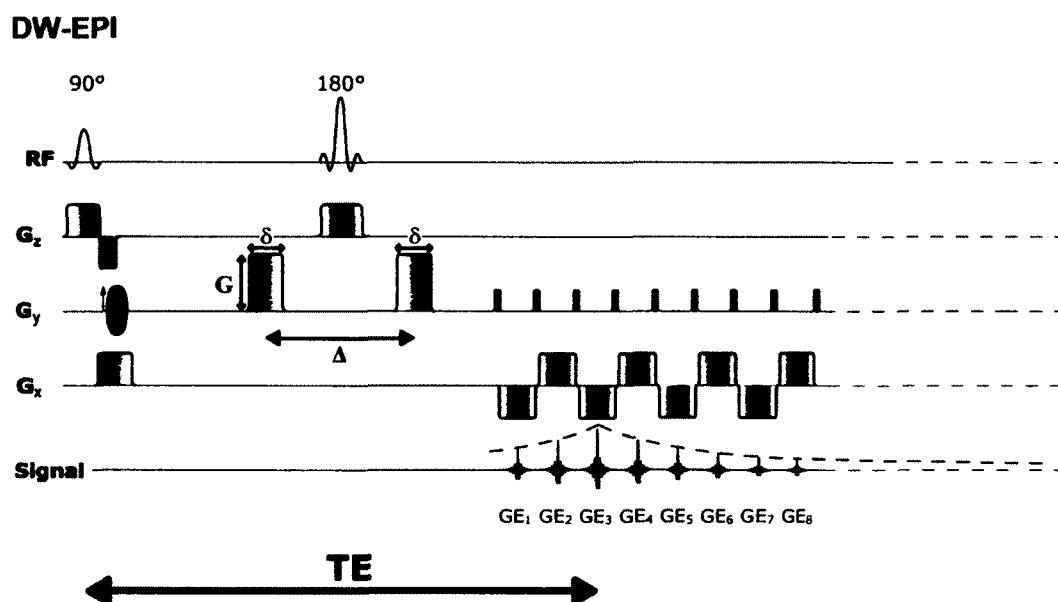


figure 2.1 – Schéma d'une séquence d'acquisition DW-EPI (*Diffusion Weighted Echo Planar Imaging*). RF : Radiofréquence, TE : Temps d'écho, GE : Écho de gradient. Image adaptée de : www.IMAIOS.com.

CHAPITRE 2. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION

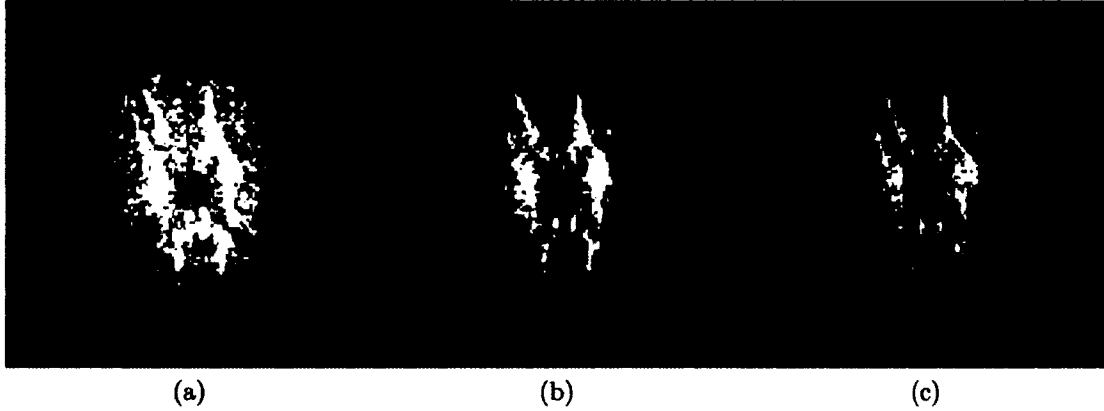


figure 2.2 – Exemples de trois images DWI en vue axiale : de gauche à droite, le facteur- b est respectivement de 960, 2160 et 6000 s/mm^2 et la direction du gradient de diffusion (dans l'espace- q) est de $(-2,0,0)$, $(-3,0,0)$ et $(-5,0,0)$. La partie frontale du cerveau est en bas.

de la diffusion sera grande. Une valeur de 0 correspond à aucune diffusion, soit une image de type T_2 standard (figure 1.2 à droite). L'équation 2.1 contient les éléments de la valeur de b :

$$b = (\gamma G \delta)^2 (\Delta - \delta/3), \quad (2.1)$$

où δ est la durée d'application du gradient de diffusion (en seconde), Δ est le temps séparant l'application des deux gradients de diffusion (en seconde) et γ est le rapport gyromagnétique (42,6 MHz/T). G est l'amplitude du gradient de diffusion (en T/mm) (voir figure 2.1). Finalement b est le facteur de gradient (en s/mm^2).

Sur la figure 2.2, nous voyons trois images en vue axiale issues de l'acquisition DW-EPI avec trois facteurs- b différents mais avec la même orientation du gradient de diffusion.

2.4 Coefficient apparent de diffusion

Le coefficient apparent de diffusion (*Apparent Diffusion Coefficient* (ADC)) se calcule avec l'acquisition d'au moins deux images : l'une avec un facteur- b à 0 s/mm^2 et l'autre avec un facteur- $b > 0 \text{ s/mm}^2$.

2.5. IMAGERIE DU TENSEUR DE DIFFUSION ET IMAGERIE DE DIFFUSION À HAUTE RÉOLUTION ANGULAIRE



figure 2.3 – Exemple de carte ADC.

$$\ln \left(\frac{S(b, \mathbf{g})}{S_0} \right) = -b \cdot \text{ADC} \quad (2.2)$$

Dans l'équation 2.2, $S(b, \mathbf{g})$ est le signal de diffusion correspondant au facteur- b b et la direction de gradient \mathbf{g} . S_0 est le signal sans pondération de diffusion ($b = 0$ s/mm²). On peut ainsi fabriquer une carte ADC (voir la figure 2.3) qui nous informe du comportement de la diffusion des molécules d'eau sur l'image (i.e. les endroits où la diffusion a été forte, le signal est fort).

2.5 Imagerie du tenseur de diffusion et imagerie de diffusion à haute résolution angulaire

L'imagerie par résonance magnétique de diffusion a pris son envol en 1994 avec l'avènement de l'imagerie du tenseur de diffusion (*Diffusion Tensor Imaging* (DTI)) [2]. Il s'agit d'acquérir plusieurs images (habituellement autour d'une douzaine) avec un facteur- b identique (habituellement choisi entre 700 et 1000 s/mm²) et en faisant varier la direction du gradient de diffusion entre chaque image. Les données ainsi re-

CHAPITRE 2. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION

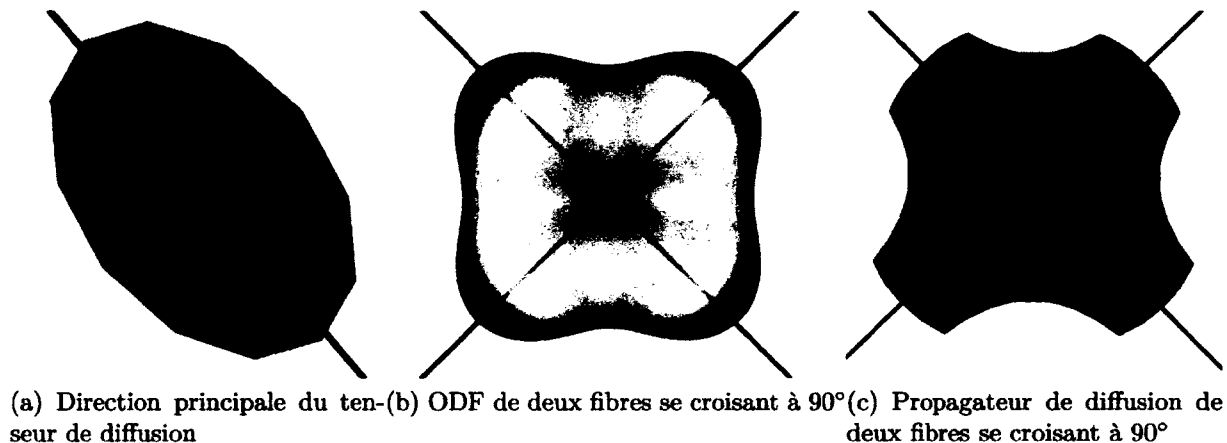


figure 2.4 – Glyphes DTI, ODF et propagateur de diffusion

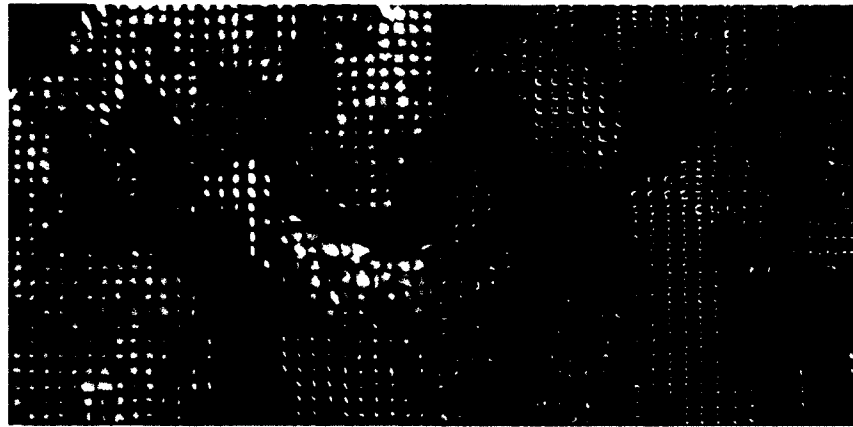
cueillies peuvent être traitées pour construire un glyphes¹ ellipsoïdal sur chaque voxel du cerveau qui nous informe de la direction principale de la diffusion locale (figures 2.4a et 2.5a). En suivant ces directions principales, il est possible de lancer des algorithmes de tractographie pour produire une image des fibres de la matière blanche du cerveau. Voir la figure 2.6 pour une tractographie DTI du cerveau de l'auteur [13].

Étant limité à n'identifier qu'une seule direction principale par voxel (parce qu'il sous-entend un propagateur gaussien avec six degrés de liberté), le DTI échoue aux endroits où il y a un croisement de fibres. L'acquisition à haute résolution angulaire (*High Angular Resolution Diffusion Imaging* (HARDI)) a été développée pour résoudre le problème d'identification des croisements [36][14]. Cette fois-ci, on acquiert beaucoup plus d'images (habituellement entre 40 et 200). Avec cette information supplémentaire, il est possible de traiter les données pour produire un glyphes qu'on appelle ODF (*Orientation Distribution Function*) (figures 2.4b et 2.5b) qui nous permet d'identifier des croisements de fibre dans un voxel. Avec la technologie HARDI et l'ODF, nous pouvons caractériser l'information angulaire des croisements de fibres à l'intérieur d'un voxel cérébral.

Les applications principales du DTI et du HARDI sont la tractographie de la matière blanche ainsi que la production d'images scalaires de type ADC, anisotropie fractionnaire (FA: *Fractional Anisotropy*), et anisotropie fractionnaire généralisée (GFA:

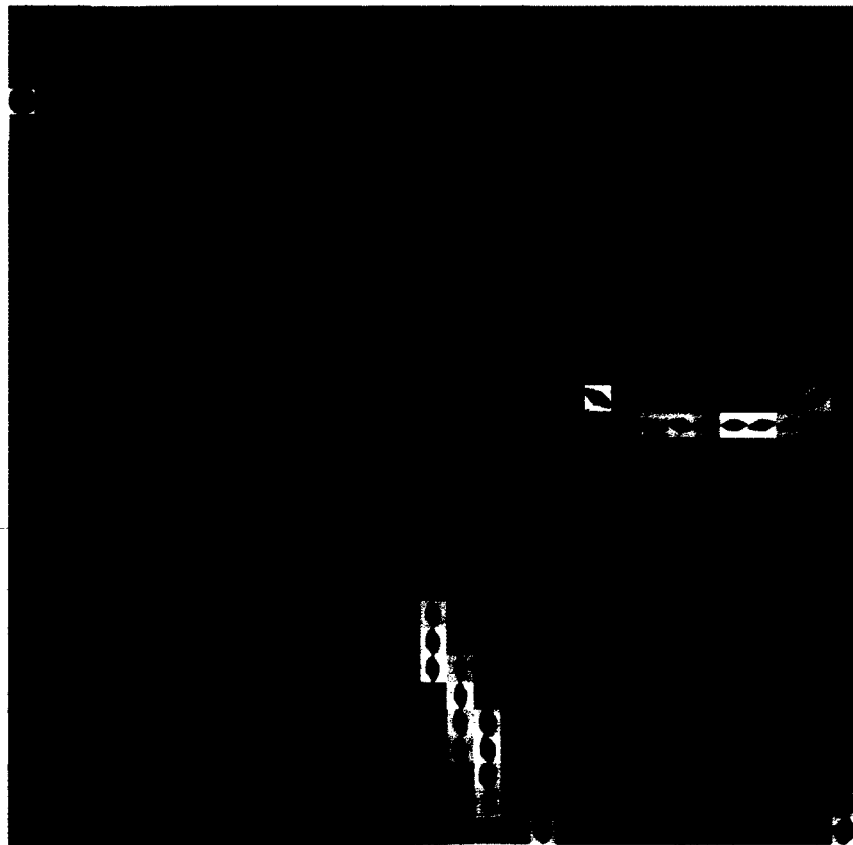
1. Nous entendons par glyphes, un objet de visualisation 3D qui nous renseigne sur les caractéristiques de diffusion dans la structure contenue dans un voxel.

2.5. IMAGERIE DU TENSEUR DE DIFFUSION ET IMAGERIE DE DIFFUSION À HAUTE RÉSOLUTION ANGULAIRE



(a) Champ de tenseurs (par DTI)

(b) Champ d'ODFs



(c) Champ de propagateurs de diffusion

figure 2.5 – Champs de glyphes de diffusion sur une tranche coronale.

CHAPITRE 2. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION



figure 2.6 – Tractographie DTI du cerveau de l'auteur. Vue quasi-sagittale.

2.6. IMAGERIE DU SPECTRE DE DIFFUSION

Generalized Fractional Anisotropy (Voir [35] et [13]).

2.6 Imagerie du spectre de diffusion

Le glyphe le plus général pour caractériser le comportement de la diffusion d'eau est le propagateur de diffusion que l'on représente par $P(\mathbf{r})$ (figures 2.4c et 2.5c). Mathématiquement, il s'agit d'une fonction de probabilité en trois dimensions nous indiquant les tendances de la diffusion des molécules d'eau en un point du cerveau. Le propagateur de diffusion nous informe non seulement sur l'information angulaire mais aussi sur l'information radiale de la diffusion. L'ajout de l'information radiale nous permettrait de caractériser l'intégrité de la matière blanche (taille d'axone, démyélinisation, mort axonale [11] [1]); ceci engendrerait la possibilité de décrire de façon plus précise le réseau de matière blanche d'un individu. Une méthode d'acquisition exhaustive faisant varier à la fois le facteur- b et l'orientation des gradients a été élaborée pour permettre la construction du propagateur de diffusion à chaque voxel du cerveau. Cette méthode a pour nom imagerie du spectre de diffusion (en anglais, *Diffusion Spectrum Imaging* (DSI)) et a été développé par Wedeen et al. à partir de l'année 2000 [38] [37]. La technique consiste à acquérir un grand nombre d'images (e.g. 515 images.) dans l'espace de diffusion (espace- q) (voir la figure 2.7). Pour chacune de ces images 3D, nous acquérons aussi un spectre de diffusion 3D. L'ensemble des données forment un objet 6D contenant trois dimensions spatiales et trois dimensions de diffusion.

En utilisant l'approximation des impulsions étroites [34], la relation entre le signal de diffusion $E(\mathbf{q})$ dans l'espace- q et le propagateur de diffusion $P(\mathbf{r})$ est donnée par une relation de la transformée de Fourier (TF) [6] telle que :

$$P(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3} E(\mathbf{q}) e^{-2\pi i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{q}. \quad (2.3)$$

Pour un voxel donné, l'équation 2.3 relie le signal acquis par IRMd au propagateur de diffusion. $E(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q})/S_0$ est le rapport entre le signal de diffusion $S(\mathbf{q})$ mesuré à la position \mathbf{q} dans l'espace- q et l'image de base S_0 acquise sans aucune sensibilisation à la diffusion ($q = 0$). $\mathbf{q} = q\mathbf{u}$ est la position dans l'espace- q , où \mathbf{u} est un vecteur unitaire 3D et $q = \|\mathbf{q}\|$. $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ est la position spatiale dans \mathbb{R}^3 , où $r = \|\mathbf{r}\|$. Le vecteur d'onde \mathbf{q} est décrit par $\mathbf{q} = \gamma \mathbf{G} \delta / 2\pi$. $\mathbf{G} = G\mathbf{u}$, où $G = \|\mathbf{G}\|$. La norme du vecteur d'onde \mathbf{q} est reliée au facteur- b par $b = (2\pi q)^2 \tau = (\gamma G \delta)^2 \tau$ où $\tau = \Delta - \delta/3$ représente le temps effectif de diffusion.

L'équation 2.3 suggère une façon assez directe pour reconstruire le propagateur de

CHAPITRE 2. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION

diffusion : avec autant d'images DWI, $E(\mathbf{q})$ correspondant chacune à un vecteur \mathbf{q} de l'espace- \mathbf{q} , on calcule la TF inverse et on reconstruit le propagateur de diffusion (voir [35]). C'est au cœur de l'imagerie de diffusion. Le problème du DSI est que le temps d'acquisition pour acquérir ces données DWI de haute dimensionnalité peut prendre jusqu'à plusieurs heures. Par conséquent, trouver une solution ayant pour but d'accélérer le temps d'acquisition est de la plus haute importance pour rendre la technologie DSI accessible à l'étude clinique.

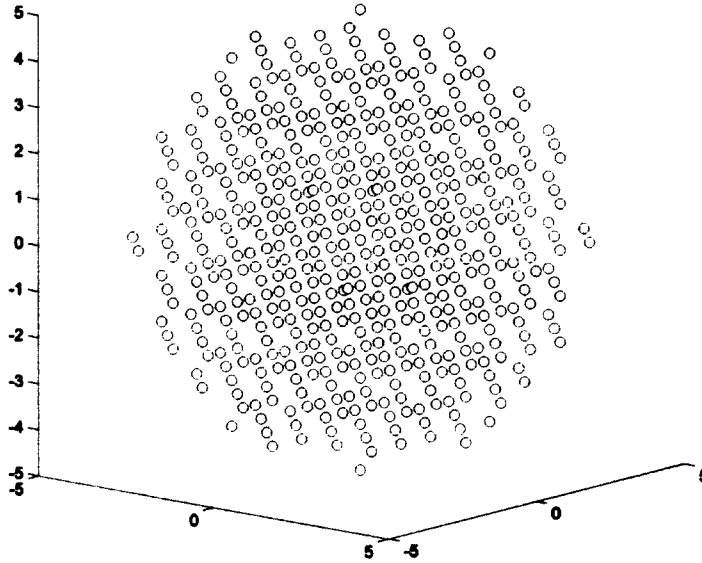


figure 2.7 – Les 515 directions d'acquisition dans l'espace- \mathbf{q} . Ici, l'espace- \mathbf{q} est discrétisé par une grille cartésienne de 11 par 11 par 11 points avec la coordonnée (0,0,0) au centre. Le facteur- b varie de 0 s/mm² au centre à 6000 s/mm² à la frontière extérieure de la boule.

2.7 Données DSI synthétiques

Afin d'analyser et de tester nos méthodes, nous utilisons des signaux DSI générés artificiellement. Une fibre dans un voxel est alors décrite par un modèle gaussien tensoriel. Nous décrivons le cas de deux ou trois fibres se croisant dans un même voxel par une combinaison de plusieurs gaussiennes qui représentent les fibres différentes qui ne s'échangent pas de molécules [13]. Pour chaque fibre $1 \leq k \leq n$, nous associons

2.8. VISUALISATION 3D DU PROPAGATEUR DE DIFFUSION

une orientation (θ_k, ϕ_k) et un poids relatif p_k . Le total des poids relatifs donne 1 ($\sum_{k=1}^n p_k = 1$). Dans nos recherches, nous utilisons une FA de 0.8 pour la génération de fibres et une FA de 0 pour la génération d'un milieu isotrope. Le signal DSI est généré par l'équation suivante :

$$S(b, \mathbf{g}_i) = S_0 \sum_{k=1}^n p_k e^{-b \mathbf{g}_i^T \mathbf{D}_k \mathbf{g}_i}, \quad (2.4)$$

où b est le facteur- b associé à \mathbf{g}_i et \mathbf{g}_i correspond à une direction normalisée du gradient de diffusion dans l'espace- q (e.g. l'une des 515 directions). Chaque tenseur \mathbf{D}_k est composé d'une matrice diagonale 3×3 ayant subi une rotation (θ_k, ϕ_k) .

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{Rot}_{(\theta_k, \phi_k)}^T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathbf{Rot}_{(\theta_k, \phi_k)}, \quad (2.5)$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 (et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) sont les valeurs propres du tenseur en $10^{-3} \text{ mm}^2/\text{s}$ et nous les calculons comme suit :

$$\lambda_1 = 0.9 * (1 + 2a) \quad (2.6)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0.9 * (1 - a) \quad (2.7)$$

$$\text{où } a = \frac{\text{FA}}{\sqrt{3 - 2(\text{FA})^2}}. \quad (2.8)$$

Dans les équations 2.6 et 2.7, la constante 0.9 correspond à la moyenne de l'ADC (en $10^{-3} \text{ mm}^2/\text{s}$). La figure 2.8 nous montre des propagateurs reconstruits (en utilisant l'équation 2.3) à partir de signaux DSI synthétiques.

Finalement, nous pouvons contaminer notre signal synthétique par un bruit ricien² pour simuler la présence de bruit d'une acquisition en système de résonance magnétique nucléaire.

2.8 Visualisation 3D du propagateur de diffusion

Pour visualiser le propagateur de diffusion en trois dimensions tel que présenté sur la figure 2.8 et la figure 2.5c, nous construisons le modèle en générant des isosurfaces translucides à partir des données (volume 3D) à plusieurs rayons du propagateur P (équation 2.3). Deux paramètres sont ajustables. Le premier est un paramètre de seuil qui nous permet de négliger de la visualisation certains faibles coefficients présents

2. Contrairement au bruit gaussien, le bruit ricien est non symétrique. En IRM, il est causé par une contamination de la phase des spins.

CHAPITRE 2. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION

dans le volume. Le deuxième est un paramètre permettant d'ajuster le nombre d'iso-surfaces que nous désirons visualiser. Les couleurs utilisées sont basées sur le modèle teinte-saturation-luminosité : de l'extérieur vers l'intérieur, les couleurs passent du rouge vers le jaune, le vert, le cyan, le bleu, le magenta et retourne au rouge. Le propagateur de diffusion ainsi modélisé peut être pivoté et analysé sous n'importe quels angles ou agrandissement.

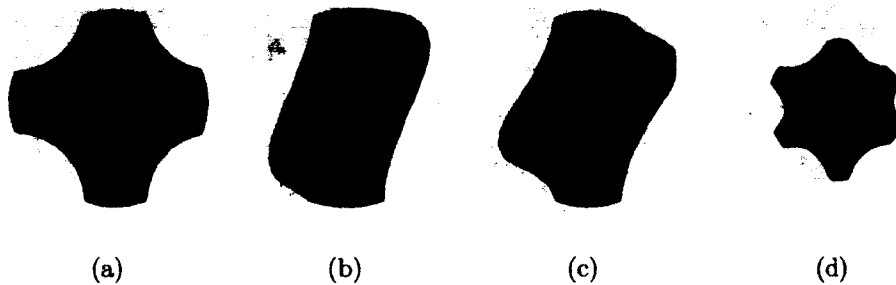


figure 2.8 – (a) Propagateur représentant 2 fibres croisées à 90° , (b) 2 fibres croisées à 45° , (c) 2 fibres croisées à 60° et (d) 3 fibres croisées à 90° .

2.9 Spécifications de l'acquisition

Pour terminer ce chapitre, voici un tableau qui résume notre acquisition DSI dans le système de résonance magnétique nucléaire.

L'estimation du rapport signal sur bruit a été calculée en utilisant une région d'intérêt du fond de l'image ainsi qu'une région d'intérêt du tractus corticospinal.

Finalement, une liste complète des directions du gradient de diffusion et du facteur-b correspondant figure à l'annexe C.

2.9. SPÉCIFICATIONS DE L'ACQUISITION

Système MR	Philips Achieva 3T (figure 1.1)
Séquence	Echo Planar Imaging (EPI)
Voxel	2 mm isotrope
Volume	128 x 128 x 55
Nombre de directions	515
Facteur-b	De 0 à 6000 s/mm ²
Facteur d'accélération de l'imagerie parallèle	2
Rapport signal sur bruit de l'image S_0	36 dB (estimé)
Temps de répétition (TR)	10912,4 ms
Temps d'écho (TE)	116,0 ms
Temps total d'acquisition	105 min

tableau 2.1 – Tableau des spécifications de l'acquisition DSI.

CHAPITRE 2. IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION

Chapitre 3

Acquisition compressée

Le théorème de Nyquist-Shannon stipule que, pour permettre une reconstruction exacte d'un signal, la fréquence d'échantillonnage de ce signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal [33]. Ce théorème est valide pour n'importe quel type de signal. Existe-t-il une façon de contourner cette barrière ?

Dans ce chapitre, nous introduisons les principes de base de l'acquisition compressée et montrons une implémentation pratique sur une image 2D du cerveau.

3.1 Introduction à l'acquisition compressée

L'idée directrice derrière l'acquisition compressée (en anglais, *Compressed Sensing* : CS) provient d'une constatation générale : les images d'intérêt sont compressibles. Par exemple, les images prises par caméra numérique peuvent être représentées dans une base de cosinus discret (format JPEG) pour une fraction de la taille de l'acquisition complète des données brutes du capteur. Remarquons aussi qu'une image de type bruit blanc est la plus difficile à compresser... Mais il ne s'agit probablement pas d'une image d'intérêt ! En fait, une infime proportion de toutes les images possibles ont des caractéristiques d'intérêt. Imaginez-vous en train de générer des images de façon aléatoire jusqu'à ce que vous tombiez sur une jugée intéressante ! Donc, le CS est une théorie qui s'applique aux signaux et images d'intérêt qui peuvent être représentés de façon compressée dans une base appropriée.

La théorie CS va à l'encontre du paradigme habituel en acquisition de données : elle stipule qu'il est possible de récupérer certains signaux ou images à partir de beaucoup moins de mesures que les méthodes traditionnelles (contraintes par le théorème de

Nyquist-Shannon). Pour rendre ceci possible, la théorie repose sur deux principes : l'éparsité¹ (en anglais, *sparsity*) et l'incohérence. Par éparsité, nous entendons l'idée qu'un signal peut être représenté dans une base Ψ de façon beaucoup plus concise que nous suggère sa longueur ; les images naturelles ont la plupart du temps cette caractéristique. L'incohérence exprime l'idée que les objets ayant une représentation éparsée dans Ψ doivent s'étendre dans leur domaine d'acquisition. Par exemple, un pic de Dirac dans le domaine spatial s'étend dans le domaine fréquentiel. L'incohérence nous dit que contrairement au signal (ou image) d'intérêt, les formes d'ondes (qui constituent le schéma d'acquisition) doivent avoir une représentation très dense dans Ψ [9].

L'hypothèse est que nous pouvons concevoir un protocole d'échantillonnage permettant de capturer le contenu du signal et de le condenser dans une petite quantité de données. Ces protocoles sont non adaptatifs et requièrent de corrélérer le signal (naturel) avec un petit nombre de formes d'onde qui sont incohérentes avec la base Ψ en nous offrant une représentation concise du signal (autrement il n'y aurait pas de corrélation entre le processus d'acquisition et le signal lui-même). De plus, il y a un moyen d'utiliser une méthode d'optimisation numérique pour reconstruire le signal complet à partir d'une petite quantité de données amassées [9]. En d'autres mots, le CS est une méthode simple et efficace d'acquisition qui consiste à :

1. acquérir le signal de façon sous-échantillonnée et de
2. le reconstruire en résolvant un problème d'optimisation qui combine le fait que le signal doit être conforme aux données amassées et que sa représentation dans une base éparsée doit être la plus concise possible.

3.1.1 Sous-échantillonnage et reconstruction de l'image éparsée

Considérons l'image (sous forme vectorielle) $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, où n est le nombre d'éléments dans l'image discrète. Cette image peut être exprimée de façon éparsée dans une base orthonormale telle que $\Psi = [\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n]$ (où Ψ est la matrice $n \times n$ avec ψ_1, \dots, ψ_n comme colonnes) :

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i, \quad (3.1)$$

où \mathbf{x} est la séquence de coefficients de \mathbf{f} , $x_i = \langle \mathbf{f}, \Psi_i \rangle$. Il est pratique d'exprimer \mathbf{f} comme $\Psi \mathbf{x}$. L'implication de l'éparsité est claire : quand un signal a une expansion

1. Nous désirons introduire le néologisme "éparsité" (n. f.) pour signifier la qualité d'être épars et pour rester en cohérence avec le mot *sparsity* largement utilisé à travers la littérature courante du domaine de l'acquisition compressée.

3.1. INTRODUCTION À L'ACQUISITION COMPRESSÉE

éparse, nous pouvons jeter les petits coefficients x_i sans perte significative de précision. Formellement, l'image \mathbf{f}_S est obtenue en ne conservant que les S plus grands coefficients et en fixant tous les autres à zéro (S est le nombre de coefficients x_i conservés).

Concernant l'acquisition, nous voudrions idéalement acquérir tous les n coefficients de \mathbf{f} mais, pour des raisons techniques, nous pouvons observer qu'un sous-ensemble de ceux-ci et accumuler les données telles que :

$$y_k = \langle \mathbf{f}, \varphi_k \rangle, \quad k \in M, \quad (3.2)$$

où les y_k sont nos mesures d'acquisition et $M \subset \{1, \dots, n\}$ est un sous-ensemble de cardinalité $m < n$. Dans l'équation 3.2, nous corrélons (par produit scalaire) notre image \mathbf{f} avec des fonctions d'onde φ_k . Le vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ est constitué de l'ensemble des mesures d'acquisition. Avec cette information, nous décidons de reconstruire l'image par une méthode de minimisation de la norme ℓ_1 (définie par $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$).

L'image reconstruite proposée \mathbf{f}^* est donnée par $\mathbf{f}^* = \Psi \mathbf{x}^*$, où \mathbf{x}^* est la solution du programme d'optimisation convexe :

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1 \quad \text{sujet à } y_k = \langle \Psi \tilde{\mathbf{x}}, \varphi_k \rangle, \quad \forall k \in M. \quad (3.3)$$

Entre d'autres termes, parmi toutes les images $\tilde{\mathbf{f}} = \Psi \tilde{\mathbf{x}}$ consistantes avec l'ensemble de nos données mesurées (le vecteur \mathbf{y}), nous choisissons l'image ayant la représentation la plus éparse dans la base Ψ .

3.1.2 Relation entre la norme et l'éparsité

La mesure de l'éparsité est définie comme étant la cardinalité de l'ensemble des coefficients représentant le signal : $\#\{i : x_i \neq 0\}$. En effet, plus cette mesure est faible, plus le nombre de coefficients nécessaire à la représentation d'un signal est petit et plus l'éparsité est grande. La mesure de l'éparsité peut être vue comme la norme ℓ_0 même si celle-ci ne répond pas à la définition formelle d'une norme [15]. Telles qu'illustrées sur la figure 3.1, la boule unitaire ℓ_0 dans \mathbb{R}^2 est une croix pointant vers les axes, tandis que la boule unitaire ℓ_1 est un carré (pivoté de 45°) dont les sommets pointent vers les axes de \mathbb{R}^2 . La boule unitaire ℓ_2 est complètement ronde et isotrope. Pour développer notre intuition aux dimensions supérieures, pour chaque octant de \mathbb{R}^3 , la boule unitaire ℓ_1 est constituée d'un tétraèdre dont trois des quatres sommets pointent vers les axes (l'autre étant à l'origine).

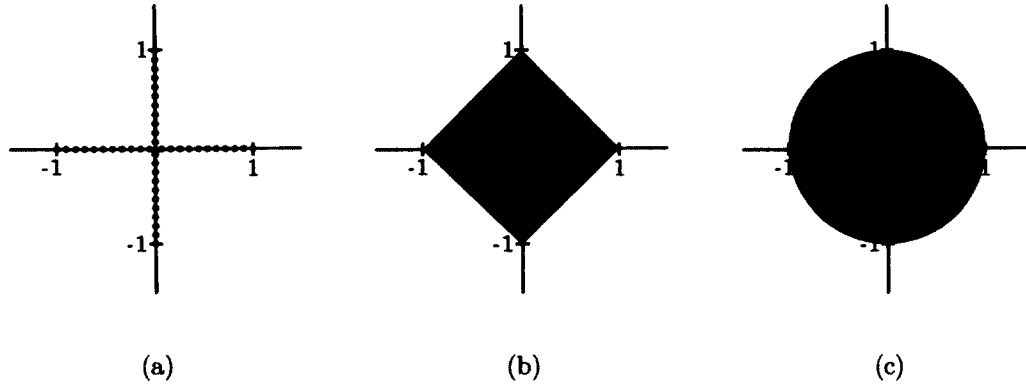


figure 3.1 – Boules unitaires selon la norme (a) ℓ_0 (semi-norme), (b) ℓ_1 et (c) ℓ_2 .

Pour fortifier notre intuition géométrique et comprendre pourquoi la norme ℓ_1 est un candidat de choix comme mesure de l'éparsité, il faut voir le problème de minimisation convexe comme un polytope dans \mathbb{R}^n et l'algorithme de résolution de la minimisation ℓ_1 comme une 'boule' anisotrope avec ses sommets pointant vers les axes de \mathbb{R}^n d'abord de rayon nul qui se gonfle jusqu'à toucher la surface du polytope de dimension n . La topologie de ce polytope est définie par les mesures y_k . C'est donc l'aspect pointu et anisotrope de la boule unitaire ℓ_1 qui nous permet d'obtenir une bonne mesure de l'éparsité.

Résoudre le problème 3.3 en changeant la norme ℓ_1 pour la semi-norme ℓ_0 est impraticable : le problème est combinatoire et NP-dur. Heureusement, la combinaison de l'anisotropie et de la convexité de la norme ℓ_1 nous permet de résoudre le problème de minimisation de l'éparsité presque aussi bien [31].

Notons qu'en pratique, l'utilisation de la semi-norme appelée variation totale (TV : *Total Variation*) produit parfois de meilleurs résultats qualitatifs que la norme ℓ_1 . La TV peut être interprétée comme la norme ℓ_1 du gradient des coefficients $\|\mathbf{x}\|_{TV} = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$ [31].

3.1.3 Un problème linéaire sous-déterminé

Nous pouvons formuler le problème du CS sous une forme d'algèbre linéaire. Nous voulons reconstruire un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ à partir des données \mathbf{y} sous la forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z}, \quad (3.4)$$

3.1. INTRODUCTION À L'ACQUISITION COMPRESSÉE

où \mathbf{A} est la matrice $m \times n$ d'acquisition nous donnant l'information sur \mathbf{x} et \mathbf{z} est un terme inconnu d'erreur stochastique ou déterminée. Définissons \mathbf{R} comme la matrice creuse $m \times n$ (contenant que des 0 et 1) qui extrait les coordonnées des données échantillonnées dans M et Φ comme la matrice $n \times n$ des formes d'ondes utilisées lors de l'acquisition de l'image (nous verrons un peu plus loin les schémas d'acquisition). Comme $\mathbf{f} = \Psi\mathbf{x}$ et $\mathbf{y} = \mathbf{R}\Phi\mathbf{f}$, nous pouvons écrire $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z}$ où $\mathbf{A} = \mathbf{R}\Phi\Psi$.

3.1.4 Propriété d'isométrie restreinte

Une notion utile pour étudier de façon générale la robustesse du CS est la propriété d'isométrie restreinte (RIP : Restricted Isometry Property). Elle est définie comme suit [7] : pour chaque entier $s = 1, 2, \dots$, nous définissons une constante d'isométrie δ_s d'une matrice \mathbf{A} comme étant le plus petit nombre tel que

$$(1 - \delta_s)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s)\|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (3.5)$$

soit valide pour tous les vecteurs \mathbf{x} d'éparsité s . Nous disons que la matrice \mathbf{A} obéit à la RIP d'ordre s si δ_s n'est pas trop près de 1. Quand la propriété tient, \mathbf{A} préserve la norme ℓ_2 de l'image d'éparsité s , ce qui implique que les vecteurs d'éparsité s ne peuvent se retrouver dans le noyau de \mathbf{A} (utile car sinon il n'y aurait pas d'espoir de reconstruire ces vecteurs). Une description équivalente de la RIP est de dire que tous les sous-ensembles des s colonnes prises de \mathbf{A} sont en fait pratiquement orthogonaux (les colonnes de \mathbf{A} ne peuvent être complètement orthogonales car nous avons plus de colonnes que de lignes).

Pour voir le lien entre la RIP et le CS, imaginons que nous souhaitons acquérir des images d'éparsité S avec \mathbf{A} . Supposons d'abord que $\delta_{2S} < 1$; alors nous affirmons qu'il est possible de reconstruire \mathbf{x} à partir de $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Bien sûr, \mathbf{x} est l'unique solution la plus éparse du système $\mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$, i.e. celle avec le plus petit nombre de valeurs non nulles. Pour le voir, considérons n'importe quelle autre solution $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ avec $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. Alors $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0}$ et, par conséquent, \mathbf{h} doit avoir au moins $2S+1$ valeurs non nulles. Il s'en suit que $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ doit avoir au moins $S+1$ valeurs non nulles. Inversement, supposons que $\delta_{2S} = 1$. Alors $2S$ colonnes de \mathbf{A} doivent être linéairement dépendantes au quel cas il y a un vecteur \mathbf{h} d'éparsité $2S$ respectant $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Nous pouvons alors décomposer \mathbf{h} comme $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ où \mathbf{x} et \mathbf{x}' ont un niveau d'éparsité S . Cela donne $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$ ce qui veut dire que nous venons de trouver une paire de vecteurs d'éparsité S ayant les mêmes mesures observées. Clairement, nous ne pouvons pas reconstruire de tel objet épars. Donc, pour reconstruire les images d'éparsité S , nous devons imposer $\delta_{2S} < 1$ ou au moins que $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$ dans l'équation 3.5 soit borné inférieurement.

Si la RIP tient, alors la reconstruction obtenue par la résolution du problème

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1 \quad \text{sujet à } \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} (= \mathbf{A}\mathbf{x}). \quad (3.6)$$

est, avec un grand niveau de confiance, exacte (pour un cas théorique sans bruit) [9].

3.2 Les trois ingrédients du CS détaillés

Pour mettre en oeuvre une solution CS, nous avons trois ingrédients à considérer :

1. une représentation éparse de l'image d'intérêt,
2. une méthode incohérente d'acquisition du signal et
3. une méthode de minimisation numérique pour solutionner le problème.

3.2.1 Représentation éparse

Dans le problème du CS, nous recherchons la représentation la plus éparse possible pour nos images d'intérêt. C'est la limite supérieure de la qualité de la reconstruction par un algorithme CS : le résultat ne peut être meilleur que sa représentation éparse ! D'où l'importance de bien identifier et caractériser l'éparsité de nos images d'intérêt. Si nous nous intéressons à des images photographiques, la transformée en cosinus discrète (DCT : *Discrete Cosine Transform*) et les transformées d'ondelettes seront performantes. Sur d'autres types d'images, les transformées de *bandelets*, de *curvelets* et de *ridgelets* peuvent s'avérer optimales.

En général, pour une image $\mathbf{f} = \Psi\mathbf{x}$, une transformée éparse efficace répartira une très grande partie de l'énergie de \mathbf{f} sur un petit nombre des coefficients \mathbf{x} et une petite partie de l'énergie de \mathbf{f} sur un grand nombre des coefficients de \mathbf{x} . En remplaçant les coefficients faibles, sous un seuil fixé T , par des zéros ($x_i = 0$ si $x_i \leq T$), nous obtenons une représentation éparse qui peut reconstruire \mathbf{f} sans trop de perte perceptuelle (ça dépend de l'agressivité du seuil T). C'est ce que nous appelons un seuillage dur (*hard thresholding*).

Brève introduction aux ondelettes

Les transformées d'ondelettes sont des méthodes efficaces pour transformer une image d'intérêt vers une base de représentation éparse. La popularité des ondelettes provient de leurs excellentes performances à établir un bon niveau d'éparsité parmi une grande variété d'images d'intérêt. Notamment, si nous ne connaissons pas *a priori* les caractéristiques de notre image d'intérêt, les ondelettes se démarquent des autres

3.2. LES TROIS INGRÉDIENTS DU CS DÉTAILLÉS

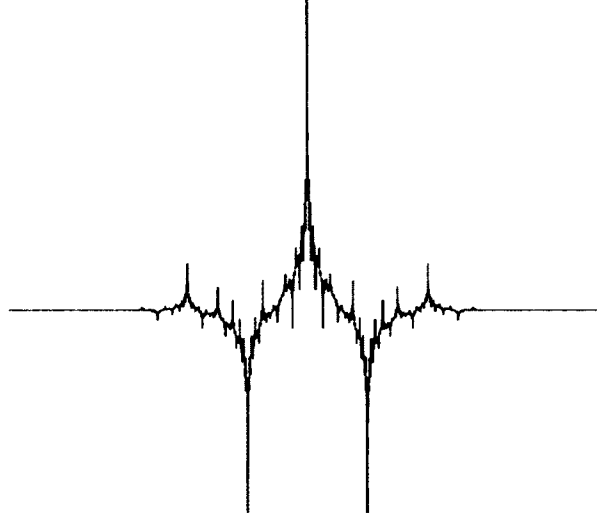


figure 3.2 – Ondelette CDF 5-3

transformées. Comme toutes les transformées éparées, les ondelettes offrent des performances modestes envers les images de bruit blanc ou les images offrant des caractéristiques fractales. Les transformées d'ondelettes sont flexibles et reposent sur une approche multi-résolution.

L'allure générale d'une ondelette est une fonction qui est égale à 0, qui oscille au-dessous et au-dessus de l'abscisse (comme une onde) et retourne à 0. Étant donné que de part et d'autre de son oscillation, elle est égale à 0, nous disons qu'une ondelette a un support compact. La proportion de l'aire au-dessus de l'abscisse est égale à celle au-dessous de l'abscisse : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$. Aussi, l'énergie de l'ondelette doit être égale à 1 : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$. Sur la figure 3.2, nous pouvons voir l'ondelette CDF (Cohen-Daubechies-Feauveau) 5-3 en 1D.

Une transformée d'ondelettes en 2D s'effectue en calculant les produits scalaires tels que :

$$\mathbf{x} = \{\langle \mathbf{f}, \psi_{j,l}^k \rangle\} \in \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

$$\text{où } \psi_{j,l}^k(t) = \psi^k\left(\frac{t - 2^j l}{2^j}\right). \quad (3.8)$$

Les ondelettes $\psi_{j,l}^k$ sont des versions dilatées (d'un facteur 2^j) et translatées (par l)

CHAPITRE 3. ACQUISITION COMPRESSÉE

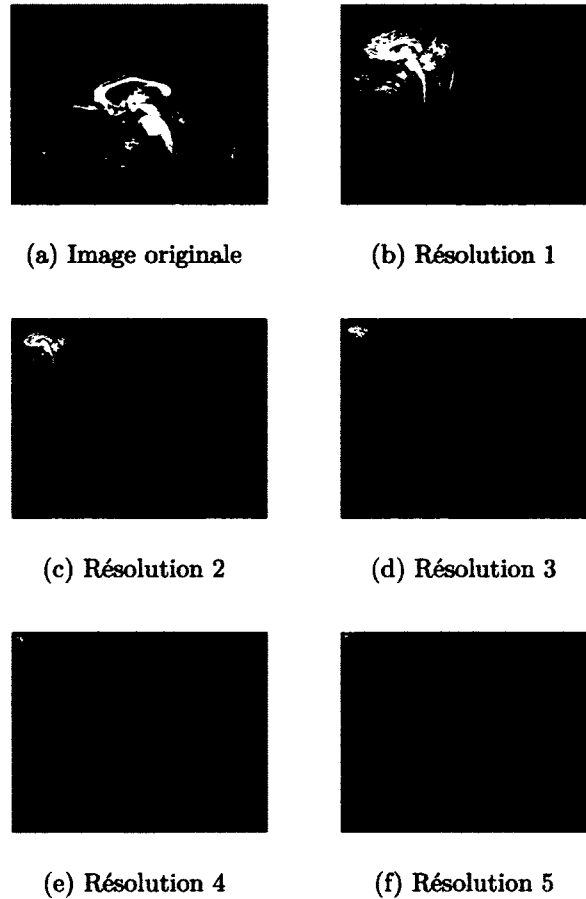


figure 3.3 – L’approche multirésolution de la transformée d’ondelettes.

de l’ondelette-mère ψ^k où $k \in \{H, V, D\}$ est une orientation (horizontale, verticale ou diagonale). En répétant l’opération de l’équation 3.7 plusieurs fois sur la partie des détails généraux de l’image, la représentation dans le domaine des ondelettes devient de plus en plus compacte (en déplaçant l’énergie des détails généraux de l’image originale vers le haut-gauche de la représentation). La figure 3.3 nous présente les résultats de plusieurs applications de l’équation 3.7 (j allant de 0 à 5) sur une image d’une tranche sagittale cérébrale.

L’étude des ondelettes est un domaine riche et complexe qui suscite un vif intérêt parmi la communauté scientifique. Pour en approfondir le sujet, nous recommandons l’incontournable ouvrage de Stéphane Mallat : *A Wavelet Tour of Signal Processing* :

3.2. LES TROIS INGRÉDIENTS DU CS DÉTAILLÉS

the sparse way [26] ainsi que *A Numerical Tour of Signal Processing* sur le web à l'adresse www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour par Gabriel Peyré.

Approximation non linéaire

Il existe plusieurs façons d'approximer notre image d'intérêt. Une méthode efficace est le seuillage non linéaire des coefficients de la représentation éparse. Le seuillage linéaire s'effectue sur les premiers coefficients tandis que le seuillage non linéaire s'effectue sur les coefficients les plus grands. Le seuillage non linéaire est généralement plus performant que le seuillage linéaire bien que, en pratique, il arrive souvent qu'on protège une partie des premiers coefficients. Voici trois méthodes de seuillages populaires : le seuillage dur (*hard thresholding*), le seuillage doux (*soft thresholding*) et le seuillage Stein (*Stein thresholding*). L'équation 3.9 de seuillage dur remplace la valeur de tous les coefficients plus petits que T par des zéros. L'équation 3.10 de seuillage doux remplace la valeur de tous les coefficients plus petits que T par des zéros et ajuste les autres linéairement afin qu'il n'y ait pas de discontinuités à T (et $-T$). L'équation 3.11 de seuillage Stein remplace la valeur de tous les coefficients plus petits que T par des zéros et ajuste les autres non linéairement afin qu'il n'y ait pas de discontinuités à T (et $-T$) et aussi en conservant des valeurs proches à celles originales aux grands coefficients. Voir la figure 3.4 pour une représentation graphique des équations de seuillage.

$$S_T^{dur}(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \quad (3.9)$$

$$S_T^{doux}(x) = x \cdot \max\left(1 - \frac{T}{|x|}, 0\right) \quad (3.10)$$

$$S_T^{Stein}(x) = x \cdot \max\left(1 - \frac{T^2}{|x|^2}, 0\right) \quad (3.11)$$

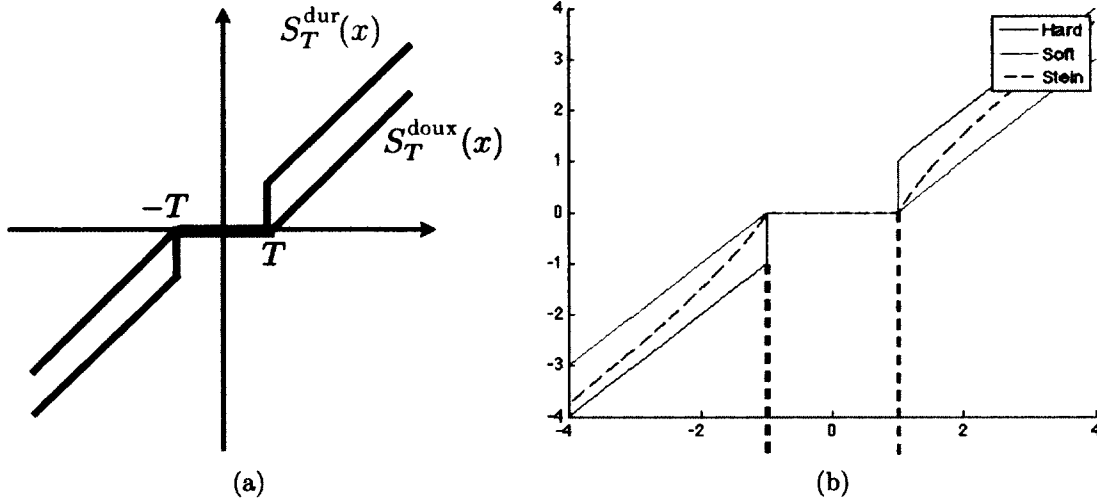


figure 3.4 – (a) Le graphique des équations de seuillage dur 3.9 et doux 3.10. Sur (b), nous voyons aussi la courbe de l'équation de seuillage Stein 3.11.

3.2.2 Schéma d'acquisition

Nous voulons un système d'acquisition Φ et un système de représentation épars Ψ qui sont maximalelement en incohérence. La cohérence μ mesure la plus grande corrélation entre n'importe quelle paire d'élément de Φ et Ψ .

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle| \quad (3.12)$$

Dans l'équation 3.12, la cohérence $\mu(\Phi, \Psi)$ est bornée entre 1 et \sqrt{n} , où n est le nombre d'éléments dans l'image [9]. Nous disons que l'incohérence est maximale quand $\mu = 1$. Par exemple, si Φ est la base canonique $\phi_k(t) = \delta(t - k)$ et que Ψ est la base de Fourier $\psi_j(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{i2\pi jt/n}$, nous avons $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ car cela correspond à la relation entre le domaine spatial et le domaine fréquentiel. Même si l'incohérence est maximale, la base de Fourier n'est pas très épars. Par conséquent, l'efficacité du CS en est affectée. Avec une base de représentation généralement plus épars, comme les ondelettes, on remarque que certains types de formes d'ondes structurées aléatoirement (e.g. *noiselets*) sont incohérentes avec les bases d'ondelettes. Par exemple, nous aurons $\mu \approx \sqrt{2}$, 2.2 et 2.9 pour respectivement les ondelettes de Haar, D4 et D8. Il est possible de construire la matrice Φ où les ϕ_k colonnes sont des formes d'ondes aléatoires et la matrice Ψ où les ψ_j sont issues d'une base de représentation épars. De façon générale, ces matrices générées aléatoirement sont largement incohérentes

3.2. LES TROIS INGRÉDIENTS DU CS DÉTAILLÉS

avec n'importe quelle base fixée Ψ . Dans ce dernier cas, avec une haute probabilité, la cohérence $\mu = \sqrt{2 \log_2 n}$. C'est d'ailleurs à partir de cette dernière observation que nous allons former nos schémas d'acquisition [9].

Pour rendre visible un schéma d'acquisition, nous allons le présenter sous forme d'un masque binaire 2D où un pixel blanc (valeur de 1) représente une mesure d'acquisition à cette position. Sur la figure 3.5, nous voyons à quoi ressemble un sous-échantillonnage uniforme aléatoire sur une grille cartésienne 256×256 . Par ailleurs, nous savons *a priori* que les données les plus importantes de l'espace-k et de l'espace-q (celles des basses fréquences) se concentrent près de l'origine. Dans une application CS de l'IRM, nous choisirons donc un schéma d'acquisition qui favorise les données près de l'origine. Plusieurs stratégies sont envisageables mais, pour des raisons techniques (physique de l'IRM et contraintes au niveau des séquences d'acquisition), il est impraticable d'échantillonner l'espace-k de façon purement aléatoire. C'est pourquoi l'une des premières propositions de schéma d'acquisition est celle du sous-échantillonnage radial (figure 3.6) : il est réalisable techniquement, il favorise les données près du centre de l'espace-k et il possède une certaine incohérence. Dans le cas des données DSI provenant de l'IRMd, nous voulons aussi favoriser le centre de l'espace-q et nous n'avons pas la contrainte technique reliée au séquençage de l'IRM classique. Nous pouvons donc envisager deux schémas d'acquisition intéressants ayant une bonne incohérence. Le premier, figure 3.7, est un sous-échantillonnage uniforme aléatoire auquel on ajoute le centre de l'espace-q (un disque de rayon 20 autour de l'origine). Le deuxième, figure 3.8, est un sous-échantillonnage non uniforme aléatoire. En utilisant la loi normale, il favorise la probabilité qu'une position soit mesurée si elle se trouve plus près de l'origine. Finalement, notons que tous ces schémas sont généralisables en 3D.

3.2.3 Méthode de minimisation

Dans la plupart des applications, les signaux sont contaminés par une certaine quantité de bruit. Pour produire alors une reconstruction CS robuste, nous utilisons une version avec des contraintes détendues de l'équation 3.6 :

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1 \quad \text{subject to } \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon, \quad (3.13)$$

où ϵ délimite la quantité de bruit dans nos données. Ensuite, l'équation sous contraintes 3.13 peut aussi s'écrire sous une forme sans contrainte :

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} J(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1. \quad (3.14)$$

L'équation 3.14 est la forme sans contrainte de l'équation 3.13 où nous cherchons

CHAPITRE 3. ACQUISITION COMPRESSÉE

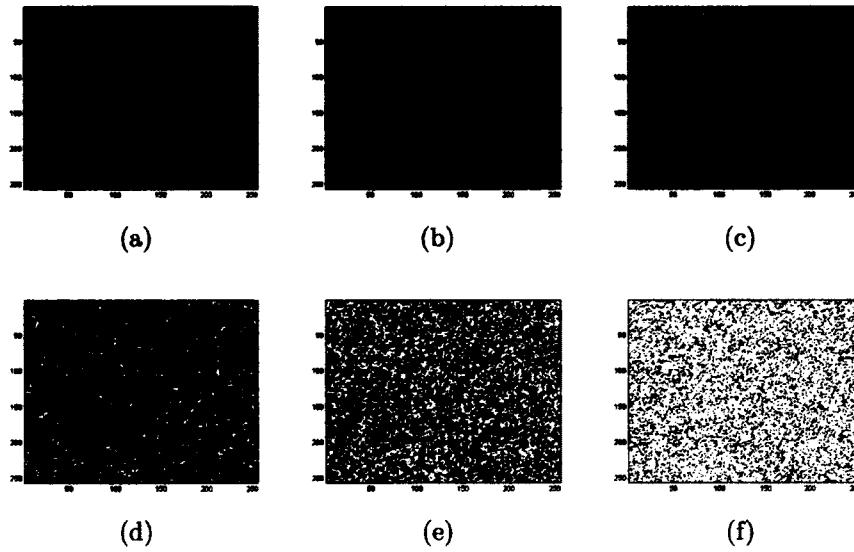


figure 3.5 – Sous-échantillonnage uniforme aléatoire. (a) 15 % de l'espace mesuré, (b) 30 %, (c) 45 %, (d) 60 %, (e), 75 % et (f) 90 %.

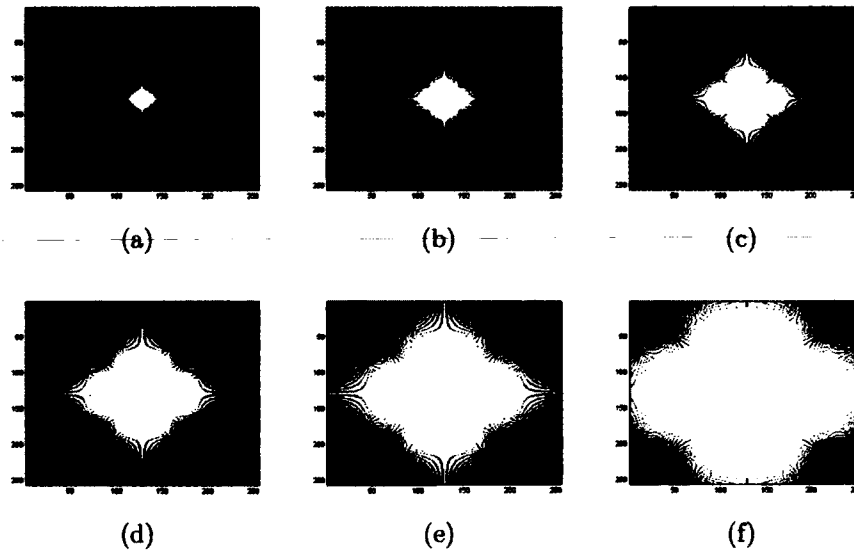


figure 3.6 – Sous-échantillonnage radial. (a) 15 % de l'espace mesuré, (b) 30 %, (c) 45 %, (d) 60 %, (e) 75 % et (f) 90 %.

3.2. LES TROIS INGRÉDIENTS DU CS DÉTAILLÉS

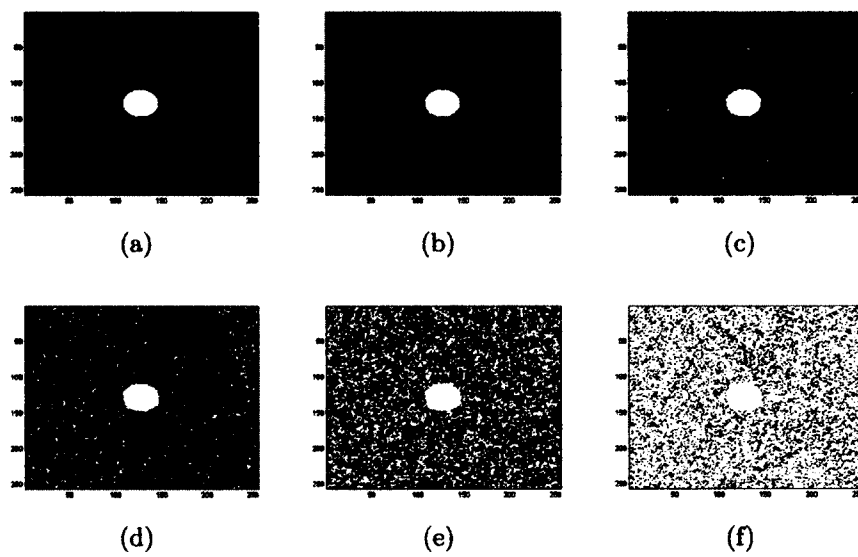


figure 3.7 – Sous-échantillonnage uniforme aléatoire avec un disque de rayon 20 autour de l'origine. (a) 15 % de l'espace mesuré, (b) 30 %, (c) 45 %, (d) 60 %, (e) 75 % et (f) 90 %.

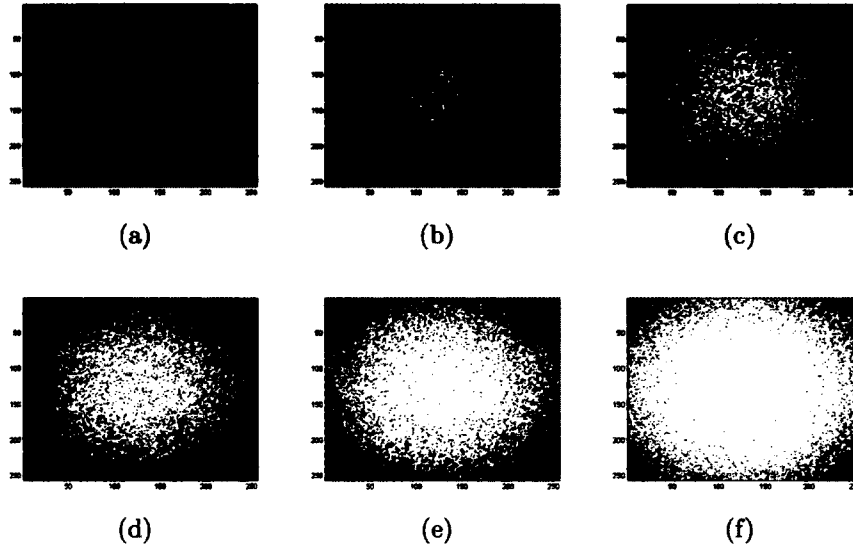


figure 3.8 – Sous-échantillonnage gaussien aléatoire. (a) 15 % de l'espace mesuré, (b) 30 %, (c) 45 %, (d) 60 %, (e) 75 % et (f) 90 %.

à minimiser la fonctionnelle J et où λ est un paramètre de régularisation qui fixe un compromis entre le terme d'attache aux données et le terme d'éparsité. Dans la pratique, λ établit aussi le niveau d'approximation de la représentation éparsée de l'image ; on l'utilise comme seuil T dans les équations de seuillage 3.9, 3.10 et 3.11 et nous verrons plus loin que déterminer λ n'est pas trivial.

Des adaptations spéciales de méthodes de minimisation convexes ont été proposées pour résoudre les équations 3.13 et 3.14. Citons par exemple, la méthode des points intérieurs [10] [22], les projections sur les ensembles convexes [8], le seuillage itératif doux [12] [26], les moindres carrés repondérés itérativement [39], la descente des gradients conjugués non linéaires (avec poursuite inverse de recherche de ligne) [5] [25], FISTA [3], et NESTA [4].

Dans le cadre de nos recherches, nous avons exploré la méthode du seuillage itératif doux, telle qu'énoncée par [26], comme méthode de minimisation du problème CS sous sa forme sans contrainte (équation 3.14). C'est une méthode simple à implémenter qui nous permet d'observer l'évolution de l'énergie tout en restant indépendant envers d'autres méthodes de minimisation maintenues et développées à l'extérieur de notre laboratoire.

3.3. EXEMPLE CS SUR UNE IMAGE 2D

3.3 Exemple CS sur une image 2D

Ici, nous détaillons en français un exemple de CS sur une image 2D où son domaine d'acquisition serait fréquentiel (issu de l'IRM).

Nous avons choisi une image T_1 d'une coupe sagittale cérébrale. La taille de l'image est 256×256 pixels et est représentée sur la figure 3.9a. Les valeurs de l'image sont normalisées entre 0 et 1. Sur la figure 3.9b, nous voyons son spectre d'amplitude dans le domaine de Fourier : ceci correspond aux données d'acquisition de l'IRM. Nous générons un schéma d'acquisition aléatoire (figure 3.9c) auquel nous ajoutons un disque de rayon 20 autour de l'origine. Le schéma couvre le tiers de l'espace. Nous appliquons ensuite ce schéma aux données d'acquisition pour simuler un sous-échantillonnage. Finalement, nous contaminons ce sous-échantillonnage par un bruit aléatoire de $\sigma = 0.01$ (pour avoir un SNR de 100 dB) (figure 3.9d). Les données sous-échantillonnées bruitées dans l'espace de Fourier correspondent à notre vecteur d'observations y . Nous voulons donc reconstruire l'image la plus semblable à l'originale à partir de y en résolvant :

$$\arg \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} J(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{TF}_u \Psi \tilde{x} - y\|_2^2 + \lambda \|\tilde{x}\|_1, \quad (3.15)$$

où \tilde{x} sont les coefficients d'ondelettes de l'image. \mathbf{TF}_u est la matrice creuse issue d'une transformée de Fourier sous-échantillonnée. Elle est issue de trois opérations :

- 1- On applique la transformée de Fourier 2D discrète sur l'image représentée par une base éparse Ψ .
- 2- Le résultat est sous-échantillonné selon le schéma d'acquisition pour correspondre au vecteur de mesures d'acquisition y .
- 3- Les autres coefficients sont remplacés par des valeurs nulles.

En appliquant la \mathbf{TF}_u inverse sur y , nous obtenons une solution initiale appelée pseudo-inverse. Pour comparer deux images sous leur forme vectorielle (I_1 et I_2), nous utilisons le rapport signal sur bruit (SNR : Signal-to-noise ratio) défini par :

$$\text{SNR} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\|I_1\|}{\|I_1 - I_2\|} \right), \quad (3.16)$$

tel qu'utilisé en traitement d'images.

En comparant avec l'image originale, l'image pseudo-inverse (figure 3.10b) a un SNR de 13.88 dB. Sur la figure 3.11b, nous pouvons voir sa représentation dans la base d'ondelettes, bien que l'énergie de l'image s'est concentrée dans le coin supérieur gauche de l'image, le niveau d'éparcité S reste de 65536.

CHAPITRE 3. ACQUISITION COMPRESSÉE

Pour résoudre l'équation 3.15, nous définissons Ψ comme base d'ondelettes biorthogonales CDF 5-3 pour la représentation éparse de notre image et nous utilisons la méthode du seuillage itératif. À chaque itération, cette méthode consiste en deux étapes :

- 1- On effectue un pas dans la descente de gradient.
- 2- On effectue un seuillage doux sur nos coefficients dans la représentation éparse.

Nous proposons trois variantes de cette méthode pour solutionner l'équation 3.15.

Comme première variante, nous testons un grand nombre de λ fixés pour dénicher le λ optimal. La figure 3.10c nous montre la reconstruction avec un $\lambda = 0.0022$. Cette dernière a un SNR de 15.83 dB par rapport à l'image originale. Sur la figure 3.11c, nous pouvons voir sa représentation dans la base d'ondelettes, le niveau d'éparsité S est de 46128.

Comme deuxième variante, nous proposons de mettre à jour dynamiquement le facteur de régularisation λ à travers les itérations pour trouver le facteur λ . Ce λ est modifié selon une règle heuristique établie par Gabriel Peyré dans *A Numerical Tour of Signal Processing*. Cette règle consiste à modifier λ tel que : $\lambda = \lambda * \frac{\sigma\sqrt{m}}{\|y - y_1\|}$ à chaque trois itérations. La figure 3.10d nous montre la reconstruction. Cette dernière a un SNR de 15.61 dB par rapport à l'image originale. Sur la figure 3.11d, nous pouvons voir sa représentation dans la base d'ondelettes, le niveau d'éparsité S est de 56242.

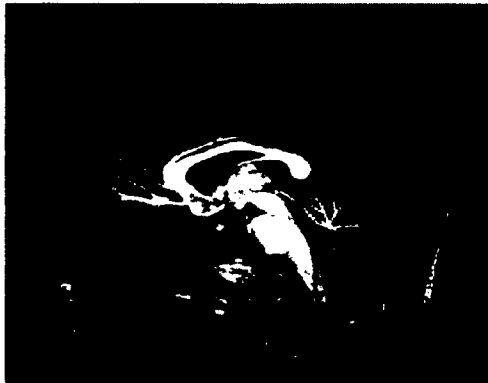
Comme troisième variante, nous proposons de remplacer le seuillage doux de la deuxième variante par un seuillage Stein. La figure 3.10e nous montre la reconstruction. Cette dernière a un SNR de 14.74 dB par rapport à l'image originale. Sur la figure 3.11e, nous pouvons voir sa représentation dans la base d'ondelettes, le niveau d'éparsité S est de 51591.

La transformée d'ondelettes de l'image originale, figure 3.11a, présente un niveau d'éparsité S de 51494.

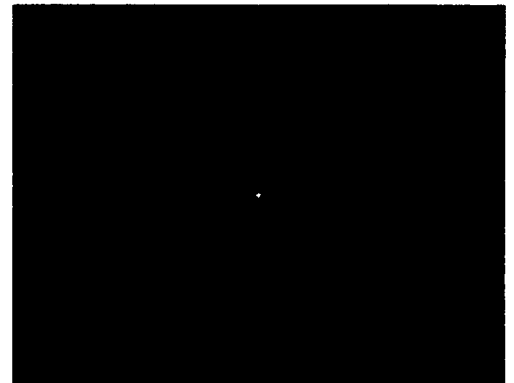
Comme nous pouvons le constater, les techniques de reconstruction CS peuvent produire des résultats surprenants : une reconstruction perceptuellement très semblable à l'image originale à partir du tiers de l'information complète. Évidemment, la qualité de l'image reconstruite sera supérieure si l'acquisition se fait à partir d'un échantillonnage plus complet. Sur la figure 3.12, nous pouvons comparer la qualité de la reconstruction avec trois échantillonnages différents. Respectivement 33 %, 50 % et 75 % de l'information complète ont été utilisés. Les λ optimaux trouvés sont : 0.0022,

3.3. EXEMPLE CS SUR UNE IMAGE 2D

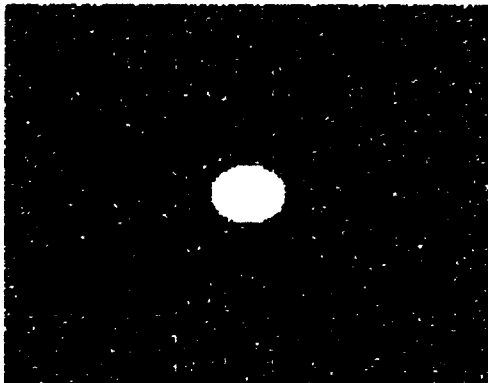
0.0044 et 0.0032.



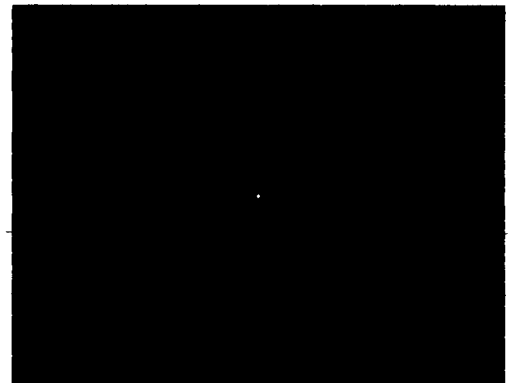
(a) Image originale



(b) Son spectre d'amplitude dans le domaine de Fourier



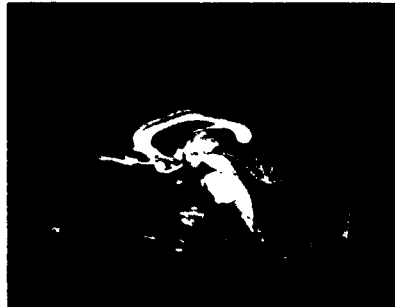
(c) Schéma d'acquisition



(d) Simulation des données observées

figure 3.9 – Exemple CS en 2D. (a) L'image originale. (b) L'image originale dans le domaine de Fourier (son spectre d'amplitude). (c) Le schéma d'acquisition où le tiers de l'espace est mesuré. (d) Les mesures d'acquisition correspondante dans le domaine de Fourier.

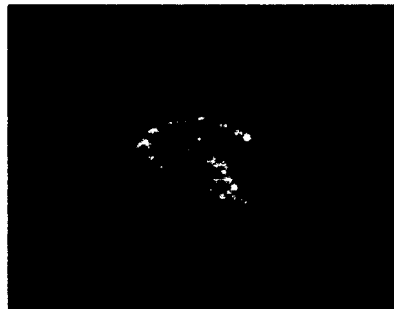
CHAPITRE 3. ACQUISITION COMPRESSÉE



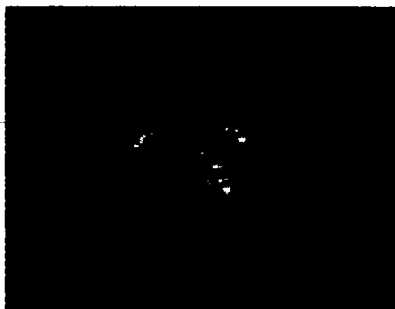
(a) Image originale



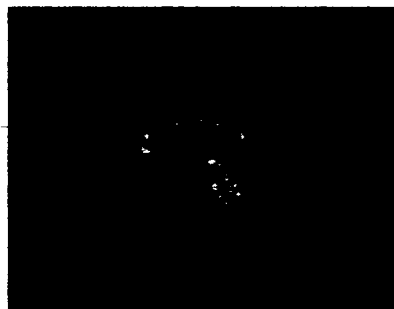
(b) Pseudo-inverse, SNR = 13.88 dB



(c) Ondelettes λ optimal, SNR = 15.83 dB



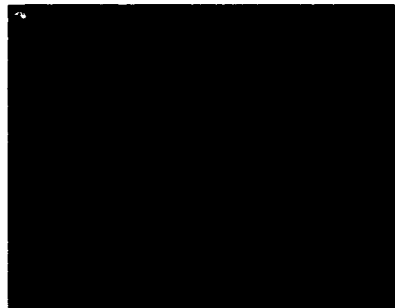
(d) Ondelettes λ dynamique, SNR = 15.61 dB



(e) Ondelettes λ dynamique et seuillage Stein, SNR = 14.74 dB

figure 3.10 – Reconstruction CS en 2D.

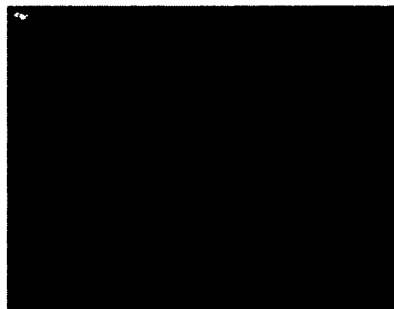
3.3. EXEMPLE CS SUR UNE IMAGE 2D



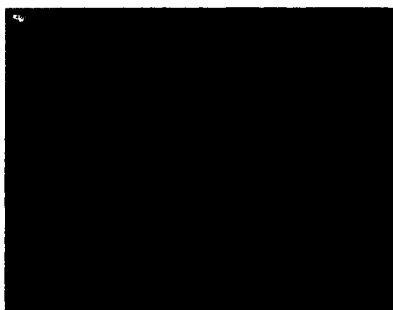
(a) Image originale, $S = 51494$



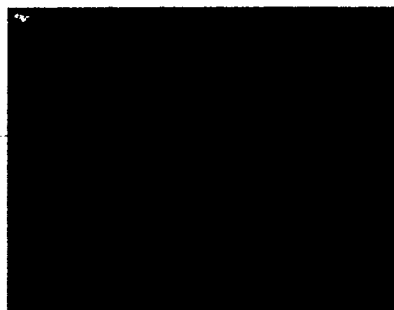
(b) Pseudo-inverse, $S = 65536$



(c) Ondelettes, $S = 46128$



(d) Ondelettes λ dynamique, $S = 56242$



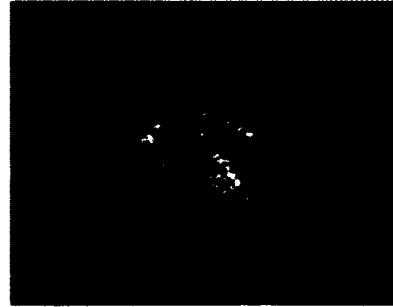
(e) Ondelettes λ dynamique et seuillage Stein, $S = 51591$

figure 3.11 – Les transformées d'ondelettes des images de la figure 3.10.

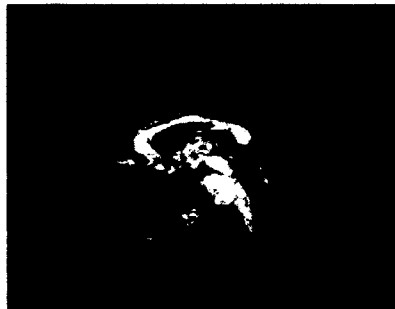
CHAPITRE 3. ACQUISITION COMPRESSÉE



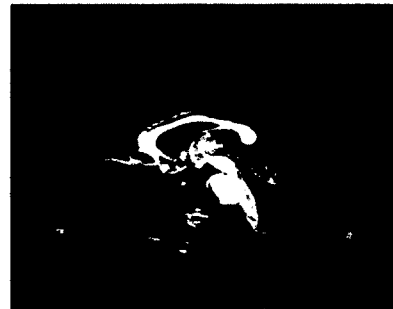
(a) Image originale



(b) Ondelettes λ optimal, SNR = 15.83 dB, échantillonnage à 33 % de l'information



(c) Ondelettes λ optimal, SNR = 20.38 dB, échantillonnage à 50 % de l'information



(d) Ondelettes λ optimal, SNR = 29.46 dB, échantillonnage à 75 % de l'information

figure 3.12 – Reconstructions CS en 2D selon l'échantillonnage.

Ce chapitre nous présentait les fondements mathématiques ainsi que des guides intuitifs pour former notre compréhension de la technologie CS. Dans le chapitre suivant, nous allons coupler la technologie CS à la technologie DSI.

Chapitre 4

Plate-forme CS-DSI

L'idée au cœur de nos recherches est d'explorer le potentiel du CS en DSI du cerveau humain. Le but premier est de diminuer le temps d'acquisition de l'examen DSI d'une durée actuelle de 1h45 (pour une acquisition telle que décrite au chapitre 2). Rappelons-nous que le jeu de données DSI est un objet de six dimensions : trois spatiales et trois spectrales. La stratégie envisagée à travers nos recherches est de sous-échantillonner les trois dimensions spectrales (l'espace-q) et de reconstruire les propagateurs de diffusion à partir de ces données.

Pour mettre en œuvre une solution CS, il nous faut adapter l'idée générale à notre situation particulière.

4.1 État de l'art en CS-DSI

Depuis l'article pionnier *Mapping Complex Tissue Architecture With Diffusion Spectrum Magnetic Resonance Imaging* de V. Wedeen et al. en 2005 [37], l'intérêt pour le DSI n'a fait qu'augmenter. Dans cet article, un schéma d'acquisition de 515 directions de gradient de diffusion est présenté. C'est le modèle cartésien présenté sur la figure 2.7 et il permet, en théorie, de discriminer des angles aussi faibles que 10° . Ils utilisent un facteur b maximal de 17 000 s/mm² ou de 8 000 s/mm² dépendant de l'acquisition. Le signal est par la suite filtré par une fenêtre de Hanning pour réduire les artefacts et le bruit au bord de l'espace-q.

Par la suite, plusieurs articles, comme *Representing Diffusion MRI in 5-D Simplifies Regularization and Segmentation of White Matter Tracts* de L. Jonasson et al. [19], font mention de l'avantage d'utiliser la symétrie des signaux DWI : il est possible d'acquérir seulement la moitié de la boule dans l'espace-q.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

Plus récemment, avec la popularité croissante du CS, certains auteurs s'attaquent à combiner IRMd et CS. Notamment, l'article *Spatially Regularized Compressed Sensing for High Angular Resolution Diffusion Imaging* de O. Michailovich [29], couple CS et HARDI en utilisant les *ridgelets* sphériques comme base de représentation éparse. Plus précisément, il formule le problème en combinant la minimisation de la norme ℓ_1 et de la variation totale (TV) et en se servant d'une méthode de minimisation utilisant l'algorithme *Split Bregman*. Il témoigne de résultats intéressants malgré son schéma d'acquisition uniforme (non aléatoire). Cette technique est dans le contexte HARDI et est donc strictement limitée à la sphère et non pas à l'ensemble de l'espace- q comme le DSI.

N. Lee et M. Singh nous rapporte, dans l'extrait de l'article *Compressed Sensing based Diffusion Spectrum Imaging* [23], les résultats d'un sous-échantillonnage d'un signal DSI synthétique non bruité de 1331 directions jusqu'à 134 directions sans perte perceptuelle de qualité. Ils reconstruisent des ODF à l'aide du CS et utilisent comme représentation éparse une base d'ondelettes Daubechies-8 (D8) (dédit par le fait qu'ils utilisent des ondelettes avec quatre moments nuls). Cet extrait nous présente des résultats préliminaires en utilisant un schéma d'acquisition aléatoire mais leur méthode de minimisation n'est pas spécifiée. Dans le présent mémoire, nous développons une solution complète, basée sur des données synthétiques et naturelles bruitées ainsi que sur la reconstruction formelle du propagateur et non pas sur ses caractéristiques (comme l'ODF).

Dans l'article *Compressed Sensing for Accelerated EAP Recovery in Diffusion MRI* [28], S. Merlet et R. Deriche utilisent la technologie CS jumelée à des données synthétiques générées sur une grille $16 \times 16 \times 16 = 4096$ qu'ils sous-échantillonnent à divers facteurs ($5 \times 5 \times 5 = 125$, $6 \times 6 \times 6 = 216$, $7 \times 7 \times 7 = 343$ et $8 \times 8 \times 8 = 512$). Ils utilisent une formulation CS ne contenant pas de représentation éparse car ils utilisent l'*éparsité naturelle* du propagateur. En d'autres termes, ils utilisent Ψ comme étant la matrice identité, ce qui revient à se servir que de la base de Fourier ; ce qui est loin d'être une représentation très éparse. Ils reconstruisent par la suite certaines caractéristiques du propagateur de diffusion comme l'ODF.

Finalement, dans l'article *Accelerated diffusion spectrum imaging in the human brain using compressed sensing* [27], M. Menzel et al. utilisent le CS pour sous-échantillonner l'espace- q en utilisant divers schémas d'acquisition (aléatoire, gaussien, disque de Poisson). Ils utilisent le CS, sans nommer leur représentation éparse ni leur méthode de minimisation ni même leur formulation du problème CS, pour reconstruire des ODFs (pour l'information angulaire) et le kurtosis (pour l'information radiale). Ils exécutent leur expérience en 2D et en 3D sur des données synthétiques et *in vivo* et rapportent

4.2. FORMULATION DU PROBLÈME CS-DSI

des résultats avec un facteur d'accélération de 4. Cet article est aussi lié de près à notre travail.

Somme toute, les recherches se concentrent surtout sur la reconstruction de certaines caractéristiques du propagateur de diffusion et non pas sur la reconstruction directe du propagateur. Ils présentent, la plupart du temps, des résultats sous la forme d'un facteur d'accélération CS mais, en réalité, c'est le nombre de directions de gradient de diffusion utilisé à l'acquisition qui importe. Nous établissons une première version fondatrice d'une plate-forme CS-DSI qui :

1. présente les trois ingrédients du CS de façon formelle,
2. est reproductible,
3. présente des résultats sur des données synthétiques et naturelles et
4. analyse les propagateurs reconstruits tant qualitativement que quantitativement.

4.2 Formulation du problème CS-DSI

Notre objet d'intérêt est la fonction de probabilité 3D appelé le propagateur de diffusion.

Pour chaque voxel du volume cérébral, nous cherchons le propagateur reconstruit tel que :

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} J(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{TF}_u \Psi \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{E}_u\|_2^2 + \lambda \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1. \quad (4.1)$$

Quand la fonctionnelle J , de l'équation 4.1, se trouve à sa valeur minimale, son argument $\tilde{\mathbf{x}}$ est le meilleur candidat parmi les vecteurs de coefficients de la représentation éparse du propagateur de diffusion. Nous appelons \mathbf{x}^* ce candidat et il suffit de calculer $\mathbf{P}^* = \Psi \mathbf{x}^*$ pour reconstruire le propagateur optimal. \mathbf{E}_u est le signal DSI sous-échantillonné et normalisé. \mathbf{TF}_u est la transformée de Fourier 3D discrète sous-échantillonnée. Le facteur de régularisation λ associe un poids sur le terme de représentation éparse du propagateur.

Pour trouver la meilleure base de représentation éparse Ψ , nous avons réalisé une batterie d'expérimentations résumée dans l'article *Sparsity Characterization of the Diffusion Propagator* [32] présenté à la conférence ISMRM 2011 et soumis à IPMI 2011. L'article complet apparaît dans l'annexe B. Nos conclusions rapportent que les transformées d'ondelettes biorthogonales 3D Cohen-Daubechies-Feauveau 5-3 et 9-7

jumelées à un seuillage doux non linéaire se démarquent pour nous donner une représentation concise du propagateur de diffusion : environ 10 % des coefficients sont nécessaires pour obtenir une bonne reconstruction de tous les types de propagateur de diffusion. Ces résultats ont été validés qualitativement et quantitativement en utilisant trois mesures différentes : le SNR (défini par l'équation 3.16), l'erreur relative (définie par l'équation 4.2) et la divergence Kullback-Leibler (div-KL) (définie par l'équation 4.3).

$$\text{Erreur relative} = \frac{\|\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2\|_2}{\|\mathbf{I}_1\|_2}. \quad (4.2)$$

$$\text{Div-KL} = \sum_{k \in K_\Omega} \mathbf{I}_1(k) \cdot \log_2 \left(\frac{\mathbf{I}_1(k)}{\mathbf{I}_2(k)} \right), \quad (4.3)$$

où K_Ω est l'ensemble de tous les indices où $\mathbf{I}(k) \neq 0$.

4.3 Méthodes

Pour résoudre le problème de l'équation 4.1, nous avons développé une plate-forme CS-DSI dans l'environnement MATLAB (MathWorks, Naticks, Massachusetts, USA). Cette section décrit et détaille les méthodes et les principaux algorithmes en pseudo-code.

4.3.1 Données

Nous avons analysé et testé notre plate-forme CS-DSI avec plusieurs configurations de données synthétiques et naturelles.

Pour les données synthétiques, nous avons généré les signaux, conformément à la section 2.7, de cinq configurations intravoxeliques de paquets de fibres :

- 1 paquet de fibres.
- 2 paquets de fibres se croisant avec un angle de 90° .
- 2 paquets de fibres se croisant avec un angle de 60° .
- 2 paquets de fibres se croisant avec un angle de 45° .
- 3 paquets de fibres se croisant avec un angle de 90° .

Ces signaux synthétiques sont contaminés par un bruit de $\sigma = 0.01, 0.02, 0.0333$ pour obtenir un signal S_0 de SNR = 100, 50, 30 dB respectivement.

Pour les données naturelles, trois voxels et une sous-section du cerveau ont été sélectionnées :

4.3. MÉTHODES

- 1 voxel du corps calleux.
- 1 voxel au croisement du corps calleux et du faisceau supérieur longitudinal.
- 1 voxel d'un ventricule.
- 1 sous-section d'une coupe coronale dans la région du centre semi-ovale.

Nous estimons le SNR de l'image S_0 des données naturelles à 36 dB.

Finalement, nous reconstruisons des champs de propagateurs à divers facteurs de compression CS. Ces champs apparaissent par dessus une carte FA de la sous-section d'une coupe coronale du centre semi-ovale du cerveau de l'auteur (voir la figure 4.4).

4.3.2 Interpolation

Pour maximiser l'efficacité de la représentation épars Ψ CDF 5-3 ou CDF 9-7, nous devons utiliser une grille où ses longueur, largeur et profondeur sont dyadiques telle que 2^j où $j \in \mathbb{N}$. Rappelons-nous que notre spectre de diffusion (contenant 515 directions), voir figure 2.7, est mesurée sur une grille $11 \times 11 \times 11$ telle que spécifiée dans l'article pionnier original de Wedeen et al. en 2005 [37]. En enlevant les six directions de gradient suivantes : $(-5,0,0)$, $(0,-5,0)$, $(0,0,-5)$, $(5,0,0)$, $(0,5,0)$ et $(0,0,5)$ (où $b = 6000 \text{ s/mm}^2$) ; nous obtenons une représentation de nos données sur une grille $9 \times 9 \times 9$ avec 509 directions. Notons que ces six directions font parties des plus bruitées de l'acquisition (à cause du facteur- b élevé) et que Wedeen et al. effectuent un filtre de Hanning pour diminuer leurs considérations. Pour obtenir une grille $8 \times 8 \times 8$, nous sauvegardons d'abord notre signal S_0 (où $b = 0 \text{ s/mm}^2$) et nous interpolons nos données de la grille $9 \times 9 \times 9$ sur une grille $8 \times 8 \times 8$. Nous utilisons une interpolation de type cubique (la fonction *interp3* de MATLAB avec le paramètre '*cubic*').

4.3.3 Schémas d'acquisition

À l'instar du modèle de schéma d'acquisition utilisé pour produire la figure 3.7, nous utilisons un schéma d'acquisition $8 \times 8 \times 8$ complètement aléatoire auquel nous ajoutons une boule de rayon 2 de mesures systématiquement acquises au centre du spectre de diffusion. Sur les figures 4.1, 4.2 et 4.3, nous pouvons voir, tranche par tranche du volume 3D, les schémas d'acquisition que nous utilisons pour acquérir 80 %, 65 % et 50 % de l'espace respectivement. Les voxels blancs représentent les points de la grille $8 \times 8 \times 8$ mesurés.

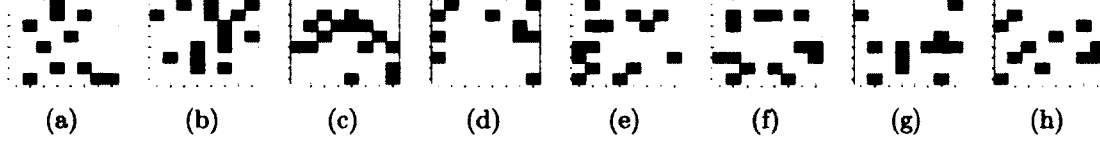


figure 4.1 – Visualisation tranche par tranche du schéma d'acquisition uniforme aléatoire avec une boule de rayon 2 (de mesures protégées) au centre du spectre de diffusion, 80 % de l'espace est mesuré. (a) Tranche 1, (b) Tranche 2, (c) Tranche 3, (d) Tranche 4, (e) Tranche 5, (f) Tranche 6, (g) Tranche 7 et (h) Tranche 8.

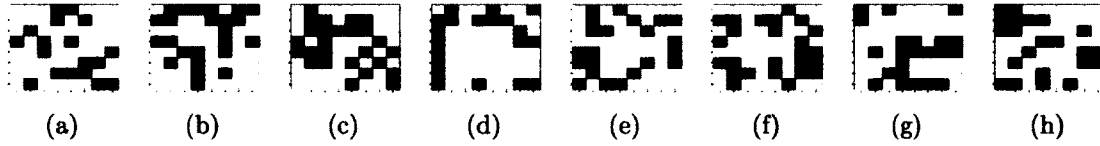


figure 4.2 – Idem, 65 % de l'espace est mesuré.

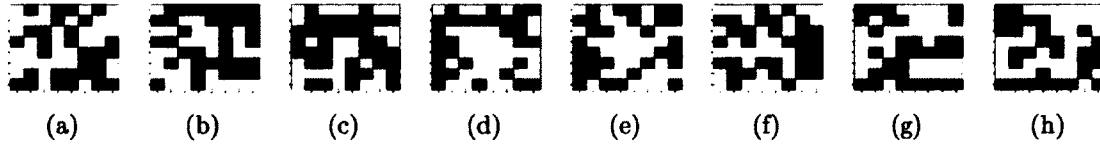


figure 4.3 – Idem, 50 % de l'espace est mesuré.

4.3.4 Algorithmes CS

Définissons d'abord quelques fonctions que nous utiliserons dans les algorithmes CS.

$S_{\lambda}^{doux}()$: Seuillage doux non linéaire des coefficients, tel que spécifié par l'équation 3.10, avec la protection des $2^{J_{min}} \times 2^{J_{min}} \times 2^{J_{min}}$ premiers éléments.

$S_{\lambda}^{Stein}()$: Seuillage doux non linéaire des coefficients, tel que spécifié par l'équation 3.11, avec la protection des $2^{J_{min}} \times 2^{J_{min}} \times 2^{J_{min}}$ premiers éléments.

4.3. MÉTHODES

$TF_u()$: Transformée de Fourier 3D normalisée et sous-échantillonnée :

- 1- L'entrée est un propagateur 3D contenant n éléments.
- 2- On applique la transformée de Fourier 3D discrète normalisée.
- 3- Le résultat est sous-échantillonné selon le schéma d'acquisition.
- 4- La sortie est un vecteur de m éléments.

$TF_u^i()$: Transformée de Fourier 3D inverse normalisée reconstruisant le propagateur :

- 1- L'entrée est un vecteur de m éléments.
- 2- Le vecteur est réassigné dans un tableau 3D selon le schéma d'acquisition.
- 3- On applique la transformée de Fourier inverse 3D discrète normalisée.
- 4- La sortie est un propagateur 3D contenant n éléments.

$TO()$: Transformée d'ondelettes biorthogonale 3D CDF 9-7.

$TO^i()$: Transformée d'ondelettes biorthogonale inverse 3D CDF 9-7.

$randn(m, 1)$: Génère un vecteur de m éléments contenant des valeurs aléatoires $\in [0, 1]$.

$snr(I_1, I_2)$: Calcul du SNR entre deux images.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

Initialisation

```
%%% Données d'entrée
P = Propagateur des données synthétiques non bruitées
    ou propagateur des données naturelles cérébrales
facteur_CS = 0.8 ou 0.65 ou 0.5
σ = 0.01 ou 0.02 ou 0.0333
n = 512
n1D =  $\sqrt[3]{n}$ 
m = ⌈n * facteur_CS⌉
niter = 40
Jmin = 2

%%% On contamine notre signal avec du bruit pour créer notre
%%% vecteur de mesures
y = TFu(P) + σ*randn(m,1)

%%% Calcul du propagateur pseudo-inverse
Ppseudo = TFui(y)
```

4.3. MÉTHODES

Algorithme CS avec recherche du lambda optimal

```
%%% ... suite à l'initialisation
{ $\lambda_{list}$ } = [0.000 : 0.001 : 0.05]
 $\lambda_{meilleur}$  = 0
 $SNR_{meilleur}$  = 0

%%% Itération 0
 $P_{coef}$  = TO( $P_{pseudo}$ )
 $P_{coef}$  =  $S_{\lambda}^{doux}(P_{coef})$ 

%%% Itérations
Pour j = 1 à #{ $\lambda_{list}$ }
    Pour i = 1 à niter
         $\tilde{P}$  = TOi( $P_{coef}$ )
         $y_1$  = TFu( $\tilde{P}$ )
        %%% Descente de gradient
         $P_{coef}$  =  $P_{coef}$  + TO(TFui(y -  $y_1$ ))
        %%% Seuillage doux non linéaire
         $P_{coef}$  =  $S_{\lambda}^{doux}(P_{coef})$ 
        %%% Calcul de l'énergie
        Energie =  $\frac{1}{2}\|y - y_1\|_2^2 + \lambda_j\|P_{coef}\|_1$ 
    Fin Pour
    Si SNR( $P, \tilde{P}$ ) >  $SNR_{meilleur}$ 
         $SNR_{meilleur}$  = SNR( $P, \tilde{P}$ )
         $\lambda_{meilleur}$  =  $\lambda_j$ 
         $\tilde{P}_{meilleur}$  =  $\tilde{P}$ 
    Fin Si
Fin Pour

%%% Le propagateur reconstruit optimal
 $P^* = \tilde{P}_{meilleur}$ 

%%% Affiche le SNR
 $SNR_{meilleur}$ 

%%% Affiche le lambda optimal
 $\lambda_{meilleur}$ 
```

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

Algorithme CS avec ondelettes avec mise à jour dynamique du lambda

```
%%% ... suite à l'initialisation
 $\lambda = 0.02$ 

%%% Itération 0
 $P_{coef} = TO(P_{pseudo})$ 
 $P_{coef} = S_{\lambda}^{doux}(P_{coef})$ 

%%% Itérations
Pour i = 1 à niter
     $\tilde{P} = TO^i(P_{coef})$ 
     $y_1 = TF_u(\tilde{P})$ 
    %%% Descente de gradient
     $P_{coef} = P_{coef} + TO(TF_u^i(y - y_1))$ 
    %%% Seuillage doux non linéaire
     $P_{coef} = S_{\lambda}^{doux}(P_{coef})$ 
    %%% Calcul de l'énergie
     $Energie = \frac{1}{2}\|y - y_1\|_2^2 + \lambda\|P_{coef}\|_1$ 
    %%% Ajuster de lambda
    Faire à chaque trois itérations :
         $\lambda = \lambda * \frac{\sigma\sqrt{m}}{\|y - y_1\|}$ 
Fin Pour

%%% Le propagateur reconstruit optimal
 $P^* = \tilde{P}$ 

%%% Affiche le SNR
snr( $P, P^*$ )
```

4.3. MÉTHODES

Algorithme CS avec ondelettes avec mise à jour dynamique du lambda et seuillage Stein

```
%%% ... suite à l'initialisation
 $\lambda = 0.02$ 

%%% Itération 0
 $P_{coef} = TO(P_{pseudo})$ 
 $P_{coef} = S_{\lambda}^{Stein}(P_{coef})$ 

%%% Itérations
Pour i = 1 à niter
     $\tilde{P} = TO^i(P_{coef})$ 
     $y_1 = TF_u(\tilde{P})$ 
    %%% Descente de gradient
     $P_{coef} = P_{coef} + TO(TF_u^i(y - y_1))$ 
    %%% Seuillage doux non linéaire
     $P_{coef} = S_{\lambda}^{Stein}(P_{coef})$ 
    %%% Calcul de l'énergie
     $Energie = \frac{1}{2}\|y - y_1\|_2^2 + \lambda\|P_{coef}\|_1$ 
    %%% Ajuster de lambda
    Faire à chaque trois itérations :
         $\lambda = \lambda * \frac{\sigma\sqrt{m}}{\|y - y_1\|}$ 
Fin Pour

%%% Le propagateur reconstruit optimal
 $P^* = \tilde{P}$ 

%%% Affiche le SNR
snr( $P, P^*$ )
```


4.3.5 Temps de calcul

Les trois variantes d'algorithme s'exécutent pratiquement à la même vitesse. Dans le cas où nous recherchons exhaustivement le λ optimal dans la première variante, il faut exécuter l'algorithme k fois (où k est le nombre dans la liste de λ différents à tester). Notre plate-forme ne contient aucune optimisation informatique pour le moment. Elle est conçue strictement à des fins de prototypage et d'analyses et elle se doit d'être facile de compréhension.

Sur un ordinateur Intel® Core™ i7-2600K, 3.40 GHz, avec un nombre d'itérations fixé à 40, l'algorithme s'effectue en 1,97 s. Avec le nombre d'itérations fixé à 20, l'algorithme s'effectue en 1,02 s sans différence notable de résultat puisque l'énergie atteint typiquement son point de convergence en moins de 20 itérations.

Pour le calcul d'un volume cérébral complet, nous pouvons considérer le problème comme, par exemple, $128 \times 128 \times 55 = 901\ 120$ sous-problèmes différents. Puisque, chaque sous-problème CS est séparable par voxel, l'algorithme est facilement parallélisable.

De légères modifications algorithmiques amélioreront le temps de calcul de plusieurs ordres de grandeur.

4.4 Résultats

Dans cette section, nous présentons qualitativement et quantitativement les résultats provenant de notre plate-forme CS-DSI pour des données synthétiques et naturelles. Puisque le propagateur de diffusion est un objet tridimensionnel, nous ne pouvons présenter qu'une projection 2D à l'intérieur de ce mémoire.

Les tableaux 4.1 et 4.2 nous présentent les résultats CS pour un propagateur de diffusion synthétique représentant un paquet de fibres. L'apparence et le SNR du propagateur restent excellents jusqu'à 65 % de l'espace mesuré avec un SNR de l'image de base à 30 dB. Une légère dégradation de la forme ainsi que des SNR sous la barre des 10 dB apparaissent quand nous descendons à 50 % de l'espace mesuré. Somme toute, le CS performe très bien dans cette configuration et produit des résultats assez impressionnants si nous comparons avec la reconstruction issue de la pseudo-inverse.

Les tableaux 4.3 et 4.4 nous présentent les résultats CS pour une configuration synthétique de deux paquets de fibres se croisant à 90°. La détection des deux fibres ainsi que la conservation de l'information angulaire sont maintenues jusqu'à un niveau ou

4.4. RÉSULTATS

50 % de l'espace est mesuré avec un SNR dans l'image de base à 50 dB. Par la suite, la détection des deux paquets de fibres devient un peu plus hardue.

Les tableaux 4.5 et 4.6 nous présentent les résultats CS pour une configuration synthétique de deux paquets de fibres se croisant à 60°. Ce croisement est moins franc que celui à 90° et il semble qu'environ 65 % de l'espace doit être mesuré pour pouvoir bien le détecter. Dans les cas où l'espace mesuré est de 50 %, la variante 3 de l'algorithme utilisant le seuillage Stein nous produit des résultats dégradés avec de faibles SNR.

Les tableaux 4.7 et 4.8 nous présentent les résultats CS pour une configuration synthétique de deux paquets de fibres se croisant à 45°. Dans ce cas-ci, il est possible de bien identifier l'information angulaire jusqu'à des mesures couvrant 50 % de l'espace mais il faut encore se méfier du seuillage Stein qui présente des propagateurs dégradés quand 50 % de l'espace est mesuré.

Les tableaux 4.9 et 4.10 nous présentent les résultats CS pour une configuration synthétique de trois paquets de fibres se croisant à 90°. C'est le cas le plus difficile à identifier et il faut pouvoir bien manipuler la visualisation du propagateur en trois dimensions pour pouvoir l'analyser. La limite pour bien identifier les trois paquets de fibres est entre un espace mesuré de 65 % avec un SNR de l'image de base à 50 dB et celle à 30 dB. Le danger est de considérer des milieux isotropes comme des zones de triple croisements ou vice-versa. Pour réduire l'apparition de faux positifs, il faut demeurer conservateur avec l'espace mesuré.

Les tableaux 4.11 et 4.12 nous présentent les résultats CS pour des données naturelles cérébrales tirées de l'examen DSI. Le corps calleux est une zone extrêmement dense de matière blanche reliant les deux hémisphères du cerveau. C'est une zone réputée pour ne contenir que très peu de croisement de fibres et où nous avons choisi un voxel d'intérêt. Comme nous pouvons le constater, la performance du CS est excellente jusqu'à un niveau de 50 % de l'espace mesuré. Il faudra toutefois éviter le seuillage Stein à ce niveau de sous-échantillonnage.

Les tableaux 4.13 et 4.14 nous présentent les résultats CS pour un voxel situé au croisement des fibres du corps calleux et des fibres du faisceau supérieur longitudinal. Le CS fait un excellent travail quand l'espace mesuré est de 80 % ou de 65 %. Pour 50 %, il faudra éviter le seuillage Stein mais le seuillage doux avec mise à jour du λ dynamique performe perceptuellement bien.

Les tableaux 4.15 et 4.16 nous présentent les résultats CS pour un voxel situé dans

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

un ventricule. Puisque c'est un milieu isotrope et que la diffusion est maximale dans toutes les directions, le signal présente l'absence de structure et ressemble à du bruit. Les performances du CS sont médiocres car le signal lui-même ne présente pas les caractéristiques d'une image d'intérêt. La théorie CS ne tient donc plus la route dans cette situation et le seuillage Stein échoue lamentablement.

Le figure 4.5 nous présente des champs de propagateurs à divers facteurs de sous-échantillonnage CS. Ces champs sont situés dans une sous-section d'une tranche coronale du cerveau telle que vue sur la figure 4.4. La figure 4.5a, nous présente les propagateurs de diffusion calculés avec 100 % des données DSI. Les figures 4.5b, 4.5c, 4.5d et 4.5e nous présentent les propagateurs de diffusion reconstruits à l'aide de la variante 2 de l'algorithme CS pour respectivement 80 %, 65 %, 50 % et 35 % des données DSI utilisées. Sur la figure 4.5e, la couleur verte translucide autour des propagateurs nous indique qu'il réside un bruit de fond de faibles valeurs dans les images des propagateurs. Finalement, la figure 4.5f, nous montre la reconstruction en utilisant 50 % des données DSI et en considérant les données symétriques. Pour pondérer l'erreur totale de chacun de ces champs de propagateurs, nous comparons chaque propagateur reconstruit avec le propagateur calculé à partir de 100 % des données et nous calculons le total de chacune de ces erreurs :

$$\text{Erreur Totale} = \sum_k \left(\|P_k^{100\%} - P_k^{\% \text{ des données}}\|_2 / n \right). \quad (4.4)$$

Pour 80 % des données utilisées, l'erreur totale est de 0.0309, pour 65 %, elle est de 0.0636, pour 50 %, elle est de 0.1280 et pour 35 %, elle est de 0.3177. Finalement, l'erreur totale en utilisant 50 % des données et en considérant le signal DSI comme étant symétrique est de 0.0150. Ce dernier résultat est remarquable car il nous indique que le signal DSI est très fortement symétrique et qu'avant toute initiative d'acquisition compressée, nous pouvons d'abord exécuter une acquisition DSI deux fois plus rapidement en mesurant que la moitié des directions et en supposant la symétrie.

4.4. RÉSULTATS

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI














































% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB					
80 %, 50 dB					
80 %, 30 dB					
65 %, 100 dB					
65 %, 50 dB					
65 %, 30 dB					
50 %, 100 dB					
50 %, 50 dB					
50 %, 30 dB					

tableau 4.1 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données synthétiques : une fibre.

4.4. RÉSULTATS

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB	SNR = 10.98 dB Erreur relative = 0.283 Div-KL = 0.047	SNR = 23.31 dB Erreur relative = 0.068 Div-KL = 0.039 $\lambda = 0.0030$	SNR = 19.75 dB Erreur relative = 0.103 Div-KL = 0.054 $\lambda = 0.0146$	SNR = 19.25 dB Erreur relative = 0.109 Div-KL = 0.065 $\lambda = 0.0224$
80 %, 50 dB	SNR = 10.15 dB Erreur relative = 0.311 Div-KL = 0.164	SNR = 17.59 dB Erreur relative = 0.132 Div-KL = 0.085 $\lambda = 0.0090$	SNR = 14.38 dB Erreur relative = 0.191 Div-KL = 0.060 $\lambda = 0.0356$	SNR = 13.69 dB Erreur relative = 0.207 Div-KL = 0.120 $\lambda = 0.0515$
80 %, 30 dB	SNR = 8.54 dB Erreur relative = 0.374 Div-KL = 0.309	SNR = 13.25 dB Erreur relative = 0.218 Div-KL = 0.130 $\lambda = 0.0220$	SNR = 10.93 dB Erreur relative = 0.284 Div-KL = 0.098 $\lambda = 0.0771$	SNR = 10.69 dB Erreur relative = 0.292 Div-KL = 0.249 $\lambda = 0.1108$
65 %, 100 dB	SNR = 4.93 dB Erreur relative = 0.567 Div-KL = 0.349	SNR = 14.78 dB Erreur relative = 0.182 Div-KL = 0.010 $\lambda = 0.0120$	SNR = 14.44 dB Erreur relative = 0.189 Div-KL = 0.014 $\lambda = 0.0141$	SNR = 12.75 dB Erreur relative = 0.230 Div-KL = 0.038 $\lambda = 0.0234$
65 %, 50 dB	SNR = 4.73 dB Erreur relative = 0.580 Div-KL = 0.458	SNR = 13.16 dB Erreur relative = 0.220 Div-KL = 0.074 $\lambda = 0.0170$	SNR = 12.67 dB Erreur relative = 0.232 Div-KL = 0.016 $\lambda = 0.0354$	SNR = 12.03 dB Erreur relative = 0.250 Div-KL = 0.136 $\lambda = 0.0520$
65 %, 30 dB	SNR = 4.26 dB Erreur relative = 0.615 Div-KL = 0.593	SNR = 11.09 dB Erreur relative = 0.278 Div-KL = 0.130 $\lambda = 0.0320$	SNR = 10.45 dB Erreur relative = 0.300 Div-KL = 0.029 $\lambda = 0.0696$	SNR = 10.24 dB Erreur relative = 0.307 Div-KL = 0.280 $\lambda = 0.1024$
50 %, 100 dB	SNR = 3.41 dB Erreur relative = 0.674 Div-KL = 0.571	SNR = 10.89 dB Erreur relative = 0.285 Div-KL = 0.049 $\lambda = 0.0160$	SNR = 8.09 dB Erreur relative = 0.393 Div-KL = 0.195 $\lambda = 0.0132$	SNR = 4.79 dB Erreur relative = 0.575 Div-KL = 0.392 $\lambda = 0.0228$
50 %, 50 dB	SNR = 3.29 dB Erreur relative = 0.684 Div-KL = 0.667	SNR = 10.39 dB Erreur relative = 0.302 Div-KL = 0.095 $\lambda = 0.0220$	SNR = 9.79 dB Erreur relative = 0.324 Div-KL = 0.093 $\lambda = 0.0333$	SNR = 6.79 dB Erreur relative = 0.457 Div-KL = 0.183 $\lambda = 0.0505$
50 %, 30 dB	SNR = 2.99 dB Erreur relative = 0.708 Div-KL = 0.787	SNR = 8.38 dB Erreur relative = 0.381 Div-KL = 0.278 $\lambda = 0.0100$	SNR = 9.61 dB Erreur relative = 0.331 Div-KL = 0.122 $\lambda = 0.0600$	SNR = 7.52 dB Erreur relative = 0.421 Div-KL = 0.273 $\lambda = 0.1033$

tableau 4.2 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données synthétiques : une fibre.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI





















% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB					
80 %, 50 dB					
80 %, 30 dB					
65 %, 100 dB					
65 %, 50 dB					
65 %, 30 dB					
50 %, 100 dB					
50 %, 50 dB					
50 %, 30 dB					

tableau 4.3 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données synthétiques : deux fibres se croisant à 90° .

4.4. RÉSULTATS

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB	SNR = 10.53 dB Erreur relative = 0.297 Div-KL = 0.051	SNR = 22.66 dB Erreur relative = 0.073 Div-KL = 0.024 $\lambda = 0.0040$	SNR = 18.77 dB Erreur relative = 0.115 Div-KL = 0.025 $\lambda = 0.014$	SNR = 17.92 dB Erreur relative = 0.127 Div-KL = 0.044 $\lambda = 0.021$
80 %, 50 dB	SNR = 9.71 dB Erreur relative = 0.327 Div-KL = 0.152	SNR = 17.13 dB Erreur relative = 0.139 Div-KL = 0.079 $\lambda = 0.0090$	SNR = 13.86 dB Erreur relative = 0.203 Div-KL = 0.042 $\lambda = 0.0379$	SNR = 12.74 dB Erreur relative = 0.231 Div-KL = 0.119 $\lambda = 0.0542$
80 %, 30 dB	SNR = 8.05 dB Erreur relative = 0.396 Div-KL = 0.281	SNR = 12.94 dB Erreur relative = 0.225 Div-KL = 0.103 $\lambda = 0.0290$	SNR = 10.25 dB Erreur relative = 0.307 Div-KL = 0.058 $\lambda = 0.0790$	SNR = 9.70 dB Erreur relative = 0.327 Div-KL = 0.127 $\lambda = 0.1149$
65 %, 100 dB	SNR = 5.11 dB Erreur relative = 0.556 Div-KL = 0.265	SNR = 12.99 dB Erreur relative = 0.224 Div-KL = 0.064 $\lambda = 0.0060$	SNR = 12.52 dB Erreur relative = 0.237 Div-KL = 0.052 $\lambda = 0.0138$	SNR = 11.26 dB Erreur relative = 0.273 Div-KL = 0.036 $\lambda = 0.0231$
65 %, 50 dB	SNR = 4.89 dB Erreur relative = 0.570 Div-KL = 0.363	SNR = 11.53 dB Erreur relative = 0.265 Div-KL = 0.123 $\lambda = 0.0170$	SNR = 11.46 dB Erreur relative = 0.267 Div-KL = 0.042 $\lambda = 0.0376$	SNR = 11.14 dB Erreur relative = 0.277 Div-KL = 0.102 $\lambda = 0.0531$
65 %, 30 dB	SNR = 4.34 dB Erreur relative = 0.607 Div-KL = 0.483	SNR = 10.33 dB Erreur relative = 0.304 Div-KL = 0.119 $\lambda = 0.0430$	SNR = 9.53 dB Erreur relative = 0.334 Div-KL = 0.073 $\lambda = 0.0696$	SNR = 8.67 dB Erreur relative = 0.368 Div-KL = 0.155 $\lambda = 0.0979$
50 %, 100 dB	SNR = 3.61 dB Erreur relative = 0.660 Div-KL = 0.439	SNR = 10.64 dB Erreur relative = 0.294 Div-KL = 0.071 $\lambda = 0.0090$	SNR = 8.49 dB Erreur relative = 0.376 Div-KL = 0.132 $\lambda = 0.0125$	SNR = 5.68 dB Erreur relative = 0.520 Div-KL = 0.208 $\lambda = 0.0229$
50 %, 50 dB	SNR = 3.47 dB Erreur relative = 0.671 Div-KL = 0.530	SNR = 10.00 dB Erreur relative = 0.316 Div-KL = 0.099 $\lambda = 0.0240$	SNR = 9.61 dB Erreur relative = 0.331 Div-KL = 0.075 $\lambda = 0.0329$	SNR = 7.31 dB Erreur relative = 0.431 Div-KL = 0.129 $\lambda = 0.0548$
50 %, 30 dB	SNR = 3.11 dB Erreur relative = 0.699 Div-KL = 0.640	SNR = 8.65 dB Erreur relative = 0.370 Div-KL = 0.200 $\lambda = 0.0330$	SNR = 9.04 dB Erreur relative = 0.353 Div-KL = 0.090 $\lambda = 0.0596$	SNR = 6.51 dB Erreur relative = 0.473 Div-KL = 0.132 $\lambda = 0.0838$

tableau 4.4 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données synthétiques : deux fibres se croisant à 90°.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB					
80 %, 50 dB					
80 %, 30 dB					
65 %, 100 dB					
65 %, 50 dB					
65 %, 30 dB					
50 %, 100 dB					
50 %, 50 dB					
50 %, 30 dB					

tableau 4.5 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données synthétiques : deux fibres se croisant à 60° .

4.4. RÉSULTATS

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB	SNR = 10.90 dB Erreur relative = 0.285 Div-KL = 0.016	SNR = 22.20 dB Erreur relative = 0.077 Div-KL = 0.026 $\lambda = 0.0040$	SNR = 18.49 dB Erreur relative = 0.118 Div-KL = 0.009 $\lambda = 0.0143$	SNR = 17.87 dB Erreur relative = 0.127 Div-KL = 0.017 $\lambda = 0.0213$
80 %, 50 dB	SNR = 9.99 dB Erreur relative = 0.316 Div-KL = 0.110	SNR = 16.75 dB Erreur relative = 0.145 Div-KL = 0.087 $\lambda = 0.0080$	SNR = 13.55 dB Erreur relative = 0.210 Div-KL = 0.047 $\lambda = 0.0380$	SNR = 13.17 dB Erreur relative = 0.219 Div-KL = 0.075 $\lambda = 0.0543$
80 %, 30 dB	SNR = 8.25 dB Erreur relative = 0.386 Div-KL = 0.230	SNR = 12.70 dB Erreur relative = 0.231 Div-KL = 0.118 $\lambda = 0.0290$	SNR = 9.94 dB Erreur relative = 0.318 Div-KL = 0.084 $\lambda = 0.0783$	SNR = 9.48 dB Erreur relative = 0.335 Div-KL = 0.087 $\lambda = 0.1104$
65 %, 100 dB	SNR = 5.11 dB Erreur relative = 0.555 Div-KL = 0.230	SNR = 12.04 dB Erreur relative = 0.249 Div-KL = 0.077 $\lambda = 0.0060$	SNR = 11.77 dB Erreur relative = 0.257 Div-KL = 0.072 $\lambda = 0.0147$	SNR = 9.31 dB Erreur relative = 0.342 Div-KL = 0.099 $\lambda = 0.0233$
65 %, 50 dB	SNR = 4.89 dB Erreur relative = 0.569 Div-KL = 0.320	SNR = 11.05 dB Erreur relative = 0.280 Div-KL = 0.118 $\lambda = 0.0210$	SNR = 11.08 dB Erreur relative = 0.279 Div-KL = 0.068 $\lambda = 0.0384$	SNR = 9.69 dB Erreur relative = 0.327 Div-KL = 0.078 $\lambda = 0.0536$
65 %, 30 dB	SNR = 4.36 dB Erreur relative = 0.605 Div-KL = 0.431	SNR = 10.00 dB Erreur relative = 0.316 Div-KL = 0.120 $\lambda = 0.0480$	SNR = 9.36 dB Erreur relative = 0.340 Div-KL = 0.097 $\lambda = 0.0706$	SNR = 8.58 dB Erreur relative = 0.372 Div-KL = 0.099 $\lambda = 0.1028$
50 %, 100 dB	SNR = 3.75 dB Erreur relative = 0.649 Div-KL = 0.375	SNR = 9.40 dB Erreur relative = 0.338 Div-KL = 0.152 $\lambda = 0.0100$	SNR = 7.81 dB Erreur relative = 0.406 Div-KL = 0.191 $\lambda = 0.0136$	SNR = 4.67 dB Erreur relative = 0.584 Div-KL = 0.301 $\lambda = 0.0218$
50 %, 50 dB	SNR = 3.61 dB Erreur relative = 0.659 Div-KL = 0.459	SNR = 8.80 dB Erreur relative = 0.363 Div-KL = 0.249 $\lambda = 0.0080$	SNR = 9.04 dB Erreur relative = 0.353 Div-KL = 0.141 $\lambda = 0.0341$	SNR = 7.79 dB Erreur relative = 0.407 Div-KL = 0.115 $\lambda = 0.0540$
50 %, 30 dB	SNR = 3.26 dB Erreur relative = 0.686 Div-KL = 0.564	SNR = 7.74 dB Erreur relative = 0.410 Div-KL = 0.354 $\lambda = 0.0080$	SNR = 8.69 dB Erreur relative = 0.367 Div-KL = 0.137 $\lambda = 0.0605$	SNR = 6.17 dB Erreur relative = 0.491 Div-KL = 0.227 $\lambda = 0.0843$

tableau 4.6 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données synthétiques : deux fibres se croisant à 60°.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI
































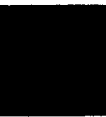




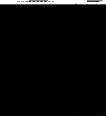




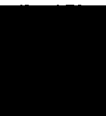



% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB					
80 %, 50 dB					
80 %, 30 dB					
65 %, 100 dB					
65 %, 50 dB					
65 %, 30 dB					
50 %, 100 dB					
50 %, 50 dB					
50 %, 30 dB					

tableau 4.7 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données synthétiques : deux fibres se croisant à 45° .

4.4. RÉSULTATS

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB	SNR = 10.85 dB Erreur relative = 0.286 Div-KL = 0.018	SNR = 22.50 dB Erreur relative = 0.074 Div-KL = 0.035 $\lambda = 0.0030$	SNR = 18.78 dB Erreur relative = 0.115 Div-KL = 0.015 $\lambda = 0.0143$	SNR = 18.30 dB Erreur relative = 0.121 Div-KL = 0.029 $\lambda = 0.0210$
80 %, 50 dB	SNR = 9.98 dB Erreur relative = 0.316 Div-KL = 0.116	SNR = 16.49 dB Erreur relative = 0.149 Div-KL = 0.113 $\lambda = 0.0040$	SNR = 13.72 dB Erreur relative = 0.206 Div-KL = 0.013 $\lambda = 0.0374$	SNR = 13.28 dB Erreur relative = 0.216 Div-KL = 0.097 $\lambda = 0.0531$
80 %, 30 dB	SNR = 8.29 dB Erreur relative = 0.384 Div-KL = 0.238	SNR = 12.77 dB Erreur relative = 0.229 Div-KL = 0.229 $\lambda = 0.0270$	SNR = 10.20 dB Erreur relative = 0.308 Div-KL = 0.141 $\lambda = 0.0786$	SNR = 9.85 dB Erreur relative = 0.321 Div-KL = 0.166 $\lambda = 0.1080$
65 %, 100 dB	SNR = 5.05 dB Erreur relative = 0.559 Div-KL = 0.245	SNR = 12.51 dB Erreur relative = 0.236 Div-KL = 0.050 $\lambda = 0.0100$	SNR = 12.06 dB Erreur relative = 0.249 Div-KL = 0.052 $\lambda = 0.0147$	SNR = 10.95 dB Erreur relative = 0.283 Div-KL = 0.049 $\lambda = 0.0245$
65 %, 50 dB	SNR = 4.84 dB Erreur relative = 0.572 Div-KL = 0.337	SNR = 11.61 dB Erreur relative = 0.262 Div-KL = 0.080 $\lambda = 0.0240$	SNR = 11.45 dB Erreur relative = 0.267 Div-KL = 0.046 $\lambda = 0.0381$	SNR = 9.49 dB Erreur relative = 0.335 Div-KL = 0.108 $\lambda = 0.0536$
65 %, 30 dB	SNR = 4.32 dB Erreur relative = 0.607 Div-KL = 0.454	SNR = 10.44 dB Erreur relative = 0.300 Div-KL = 0.095 $\lambda = 0.0460$	SNR = 9.69 dB Erreur relative = 0.327 Div-KL = 0.050 $\lambda = 0.0705$	SNR = 9.10 dB Erreur relative = 0.350 Div-KL = 0.177 $\lambda = 0.1036$
50 %, 100 dB	SNR = 3.75 dB Erreur relative = 0.649 Div-KL = 0.400	SNR = 10.03 dB Erreur relative = 0.315 Div-KL = 0.063 $\lambda = 0.0210$	SNR = 7.82 dB Erreur relative = 0.406 Div-KL = 0.170 $\lambda = 0.0135$	SNR = 4.82 dB Erreur relative = 0.574 Div-KL = 0.285 $\lambda = 0.0231$
50 %, 50 dB	SNR = 3.62 dB Erreur relative = 0.659 Div-KL = 0.484	SNR = 9.52 dB Erreur relative = 0.333 Div-KL = 0.152 $\lambda = 0.0240$	SNR = 9.24 dB Erreur relative = 0.344 Div-KL = 0.101 $\lambda = 0.0341$	SNR = 6.58 dB Erreur relative = 0.468 Div-KL = 0.163 $\lambda = 0.0524$
50 %, 30 dB	SNR = 3.27 dB Erreur relative = 0.685 Div-KL = 0.590	SNR = 7.92 dB Erreur relative = 0.401 Div-KL = 0.323 $\lambda = 0.0080$	SNR = 9.02 dB Erreur relative = 0.353 Div-KL = 0.085 $\lambda = 0.0606$	SNR = 6.73 dB Erreur relative = 0.460 Div-KL = 0.211 $\lambda = 0.0896$

tableau 4.8 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données synthétiques : deux fibres se croisant à 45°.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI














































% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB					
80 %, 50 dB					
80 %, 30 dB					
65 %, 100 dB					
65 %, 50 dB					
65 %, 30 dB					
50 %, 100 dB					
50 %, 50 dB					
50 %, 30 dB					

tableau 4.9 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données synthétiques : trois fibres se croisant à 90°.

4.4. RÉSULTATS

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 100 dB	SNR = 10.59 dB Erreur relative = 0.295 Div-KL = 0.008	SNR = 23.04 dB Erreur relative = 0.070 Div-KL = 0.027 $\lambda = 0.0030$	SNR = 18.22 dB Erreur relative = 0.122 Div-KL = 0.011 $\lambda = 0.0132$	SNR = 17.35 dB Erreur relative = 0.135 Div-KL = 0.036 $\lambda = 0.0196$
80 %, 50 dB	SNR = 9.79 dB Erreur relative = 0.324 Div-KL = 0.080	SNR = 17.09 dB Erreur relative = 0.139 Div-KL = 0.080 $\lambda = 0.0070$	SNR = 13.55 dB Erreur relative = 0.209 Div-KL = 0.008 $\lambda = 0.0396$	SNR = 12.72 dB Erreur relative = 0.231 Div-KL = 0.092 $\lambda = 0.0579$
80 %, 30 dB	SNR = 8.13 dB Erreur relative = 0.391 Div-KL = 0.195	SNR = 13.16 dB Erreur relative = 0.219 Div-KL = 0.122 $\lambda = 0.0300$	SNR = 9.88 dB Erreur relative = 0.320 Div-KL = 0.124 $\lambda = 0.0810$	SNR = 9.29 dB Erreur relative = 0.343 Div-KL = 0.210 $\lambda = 0.1122$
65 %, 100 dB	SNR = 6.61 dB Erreur relative = 0.466 Div-KL = 0.097	SNR = 15.30 dB Erreur relative = 0.171 Div-KL = 0.042 $\lambda = 0.0050$	SNR = 14.31 dB Erreur relative = 0.192 Div-KL = 0.018 $\lambda = 0.0127$	SNR = 12.67 dB Erreur relative = 0.232 Div-KL = 0.028 $\lambda = 0.0193$
65 %, 50 dB	SNR = 6.32 dB Erreur relative = 0.483 Div-KL = 0.184	SNR = 13.54 dB Erreur relative = 0.210 Div-KL = 0.070 $\lambda = 0.0180$	SNR = 12.54 dB Erreur relative = 0.236 Div-KL = 0.029 $\lambda = 0.0359$	SNR = 11.69 dB Erreur relative = 0.260 Div-KL = 0.058 $\lambda = 0.0525$
65 %, 30 dB	SNR = 5.58 dB Erreur relative = 0.525 Div-KL = 0.296	SNR = 11.69 dB Erreur relative = 0.260 Div-KL = 0.131 $\lambda = 0.0360$	SNR = 9.98 dB Erreur relative = 0.316 Div-KL = 0.094 $\lambda = 0.0692$	SNR = 8.17 dB Erreur relative = 0.390 Div-KL = 0.109 $\lambda = 0.0984$
50 %, 100 dB	SNR = 4.01 dB Erreur relative = 0.629 Div-KL = 0.301	SNR = 12.09 dB Erreur relative = 0.248 Div-KL = 0.032 $\lambda = 0.0080$	SNR = 9.67 dB Erreur relative = 0.328 Div-KL = 0.057 $\lambda = 0.0120$	SNR = 6.66 dB Erreur relative = 0.464 Div-KL = 0.148 $\lambda = 0.0215$
50 %, 50 dB	SNR = 3.87 dB Erreur relative = 0.639 Div-KL = 0.383	SNR = 11.14 dB Erreur relative = 0.277 Div-KL = 0.111 $\lambda = 0.0090$	SNR = 10.75 dB Erreur relative = 0.289 Div-KL = 0.031 $\lambda = 0.0319$	SNR = 9.26 dB Erreur relative = 0.344 Div-KL = 0.182 $\lambda = 0.0499$
50 %, 30 dB	SNR = 3.50 dB Erreur relative = 0.668 Div-KL = 0.487	SNR = 9.01 dB Erreur relative = 0.354 Div-KL = 0.241 $\lambda = 0.0090$	SNR = 9.81 dB Erreur relative = 0.323 Div-KL = 0.107 $\lambda = 0.0592$	SNR = 5.82 dB Erreur relative = 0.511 Div-KL = 0.220 $\lambda = 0.0868$

tableau 4.10 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données synthétiques : trois fibres se croisant à 90°.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI
















% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 36 dB					
65 %, 36 dB					
50 %, 36 dB					

tableau 4.11 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données naturelles cérébrales : un voxel du corps calleux (1 fibre).

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 36 dB	SNR = 9.13 dB Erreur relative = 0.349 Div-KL = 0.093	SNR = 17.77 dB Erreur relative = 0.129 Div-KL = 0.016 $\lambda = 0.0050$	SNR = 17.64 dB Erreur relative = 0.131 Div-KL = 0.023 $\lambda = 0.0095$	SNR = 12.66 dB Erreur relative = 0.233 Div-KL = 0.013 $\lambda = 0.0174$
65 %, 36 dB	SNR = 5.72 dB Erreur relative = 0.517 Div-KL = 0.043	SNR = 11.83 dB Erreur relative = 0.256 Div-KL = 0.065 $\lambda = 0.0070$	SNR = 10.24 dB Erreur relative = 0.307 Div-KL = 0.044 $\lambda = 0.0089$	SNR = 7.26 dB Erreur relative = 0.433 Div-KL = 0.009 $\lambda = 0.0173$
50 %, 36 dB	SNR = 3.92 dB Erreur relative = 0.636 Div-KL = 0.031	SNR = 9.39 dB Erreur relative = 0.339 Div-KL = 0.060 $\lambda = 0.0090$	SNR = 6.93 dB Erreur relative = 0.450 Div-KL = 0.106 $\lambda = 0.0081$	SNR = 4.81 dB Erreur relative = 0.574 Div-KL = 0.064 $\lambda = 0.0165$

tableau 4.12 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données naturelles cérébrales : un voxel du corps calleux (1 fibre).

4.4. RÉSULTATS
















% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 36 dB					
65 %, 36 dB					
50 %, 36 dB					

tableau 4.13 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données naturelles cérébrales : un voxel au croisement du corps calleux et du faisceau supérieur longitudinal (zone de croisement).

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 36 dB	SNR = 8.38 dB Erreur relative = 0.380 Div-KL = 0.070	SNR = 18.04 dB Erreur relative = 0.125 Div-KL = 0.029 $\lambda = 0.0020$	SNR = 15.74 dB Erreur relative = 0.163 Div-KL = 0.062 $\lambda = 0.0099$	SNR = 16.58 dB Erreur relative = 0.148 Div-KL = 0.024 $\lambda = 0.0170$
65 %, 36 dB	SNR = 6.05 dB Erreur relative = 0.498 Div-KL = 0.042	SNR = 13.34 dB Erreur relative = 0.215 Div-KL = 0.078 $\lambda = 0.0030$	SNR = 12.90 dB Erreur relative = 0.226 Div-KL = 0.078 $\lambda = 0.0091$	SNR = 10.38 dB Erreur relative = 0.302 Div-KL = 0.044 $\lambda = 0.0170$
50 %, 36 dB	SNR = 4.04 dB Erreur relative = 0.627 Div-KL = 0.039	SNR = 9.78 dB Erreur relative = 0.323 Div-KL = 0.059 $\lambda = 0.0050$	SNR = 9.55 dB Erreur relative = 0.332 Div-KL = 0.094 $\lambda = 0.0084$	SNR = 5.36 dB Erreur relative = 0.539 Div-KL = 0.050 $\lambda = 0.0171$

tableau 4.14 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données naturelles cérébrales : un voxel au croisement du corps calleux et du faisceau supérieur longitudinal (zone de croisement).

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

% mesuré, SNR de S_0	original	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 36 dB					
65 %, 36 dB					
50 %, 36 dB					

tableau 4.15 – Résultats CS-DSI qualitatifs sur des données naturelles cérébrales : un voxel d'un ventricule (milieu isotrope).

% mesuré, SNR de S_0	pseudo-inverse	CS λ optimal	CS λ dynamique	CS λ dyn. Stein
80 %, 36 dB	SNR = 22.53 dB Erreur relative = 0.074 Div-KL = 0.001	SNR = 21.57 dB Erreur relative = 0.083 Div-KL = 0.002 $\lambda = 0.0000$	SNR = 11.78 dB Erreur relative = 0.257 Div-KL = 0.018 $\lambda = 0.0229$	SNR = 0.21 dB Erreur relative = 0.975 Div-KL = 0.293 $\lambda = 0.0304$
65 %, 36 dB	SNR = 20.15 dB Erreur relative = 0.098 Div-KL = 0.002	SNR = 19.86 dB Erreur relative = 0.101 Div-KL = 0.002 $\lambda = 0.0000$	SNR = 10.87 dB Erreur relative = 0.286 Div-KL = 0.036 $\lambda = 0.0200$	SNR = 2.48 dB Erreur relative = 0.751 Div-KL = 0.342 $\lambda = 0.0276$
50 %, 36 dB	SNR = 17.88 dB Erreur relative = 0.127 Div-KL = 0.003	SNR = 16.87 dB Erreur relative = 0.143 Div-KL = 0.007 $\lambda = 0.0000$	SNR = 10.15 dB Erreur relative = 0.310 Div-KL = 0.061 $\lambda = 0.0179$	SNR = 0.11 dB Erreur relative = 0.987 Div-KL = 0.352 $\lambda = 0.0271$

tableau 4.16 – Résultats CS-DSI quantitatifs sur des données naturelles cérébrales : un voxel d'un ventricule (milieu isotrope).

4.4. RÉSULTATS

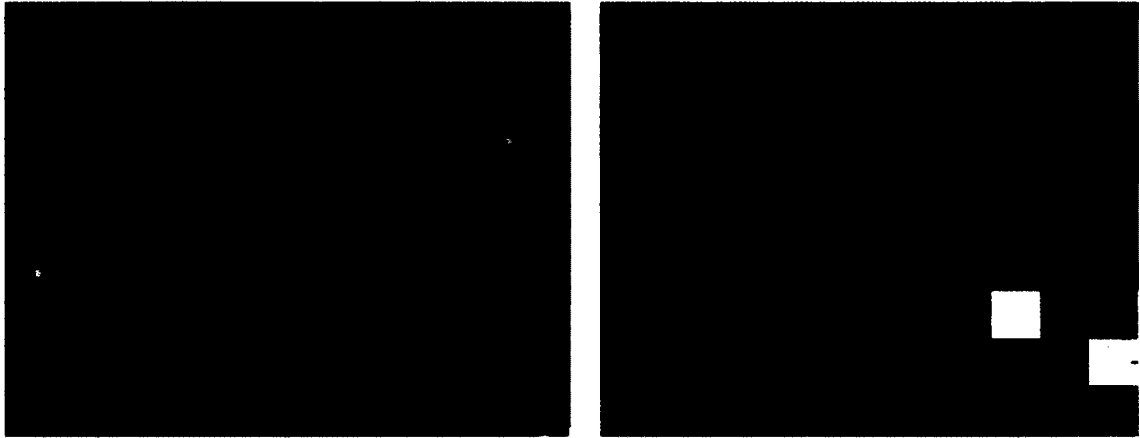


figure 4.4 – Carte FA d'une tranche coronale cérébrale dans le centre semi-ovale, la sous-section d'intérêt est colorée en orange et est agrandie.

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

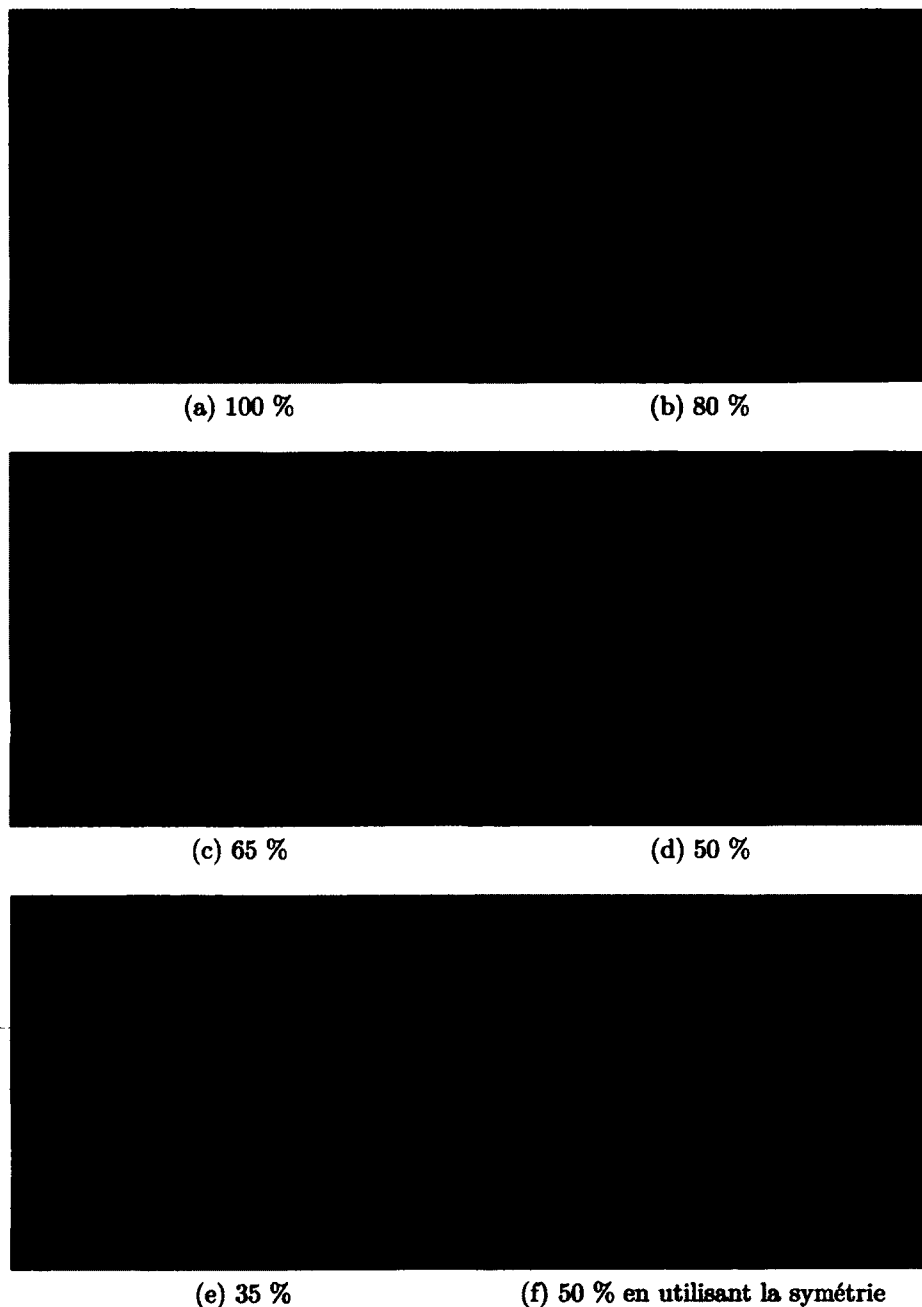


figure 4.5 – Champs de propagateurs à divers facteurs de sous-échantillonnage pour des données naturelles cérébrales. (a) 100 % du signal DSI est utilisé, (b) CS avec 80 %, (c) CS avec 65 %, (d) CS avec 50 %, (e) CS avec 35 % et (f) 50 % en utilisant la symétrie du signal DSI.

4.4. RÉSULTATS

4.4.1 Sommaire des résultats

À la lumière de ces résultats, nous pouvons établir qu'il est envisageable de sous-échantillonner l'espace- q de 50 % sous quelques conditions. D'abord, le seuillage doux performe dans la grande majorité des cas mieux que le seuillage Stein. Ceci entraîne une nouvelle question : quelle serait une meilleure règle heuristique de mise à jour du λ dans le cas du seuillage Stein ? Par ailleurs, avec la variante 1 de l'algorithme CS, nous testons une liste de λ différents pour dénicher le λ fixe optimal ; dans la réalité, nous ne pourrions le faire car le signal du spectre de diffusion complet est inconnu. Nous devons donc nous tourner vers la variante 2 de l'algorithme CS, qui performe en général très bien, et tenter d'améliorer la mise à jour heuristique du terme λ . Encore une fois, la question de trouver la meilleure méthode de minimisation du problème CS reste ouverte...

CHAPITRE 4. PLATE-FORME CS-DSI

Conclusion

La mise en œuvre de cette plate-forme CS-DSI constitue la pierre angulaire de l'accélération de l'examen DSI. Les fondements mathématiques et technologiques sont maintenant établis et nous savons vers quelle direction travailler pour rendre l'examen DSI accessible à l'étude clinique.

Rappelons-nous que nous voulons produire un examen de la qualité du DSI exhaustif tel que spécifié par Wedeen et al. [37] en moins de 30 minutes alors que la version exhaustive en prend 105 minutes.

À la lumière de nos résultats, voici la solution que nous proposons. D'abord, l'identification d'une base de représentation éparsée pour le propagateur de diffusion est d'une importance cruciale pour la performance du CS mais elle a aussi un impact sur l'acquisition elle-même : l'étape d'interpolation devient inutile si nous acquérons nos données directement sur une grille $8 \times 8 \times 8$. Nous proposons de remplacer les 515 directions d'acquisition de l'espace- q (voir figure 2.7) par une acquisition de 512 directions sur un cube $8 \times 8 \times 8$ complet avec en plus une image supplémentaire S_0 , où $b = 0$ s/mm². De plus, étant donné que nous voulons utiliser la symétrie du signal DSI, nous allons en réalité acquérir qu'un demi-cube $8 \times 8 \times 4$ de 256 directions. En utilisant un facteur CS de 56 % sur les directions restantes, nous proposons d'acquérir 143 directions du demi-cube en respectant un schéma d'acquisition gaussien aléatoire. Ce nouveau protocole d'acquisition, jumelant symétrie et CS, nous amène vers un temps d'acquisition d'environ 29 minutes.

Pour pousser plus loin la qualité des résultats et/ou l'accélération de l'acquisition, il faut garder à l'esprit les questions ouvertes du CS :

- 1- Quelle est la meilleure base de représentation éparsée ?
- 2- Quel est le meilleur schéma d'acquisition ?
- 3- Quelle est la meilleure méthode de minimisation du problème CS ?
- 4- Et finalement, quelle est la meilleure formulation du problème CS ?

CONCLUSION

Concernant la question 1, nous avons identifié comme base de représentation éparse les ondelettes biorthogonales CDF 5-3 et CDF 9-7. Mais il existe plusieurs autres bases (ondelettes ou autres) qui pourraient s'avérer excellentes. En particulier, les dictionnaires d'atomes basés sur des algorithmes d'apprentissage méritent une attention spéciale à notre problème de reconstruction du propagateur de diffusion car ce sont des algorithmes guidés par les données elles-mêmes. Il est très probable que l'on découvre une meilleure base de représentation éparse à travers ces méthodes.

Concernant la question 2, nous voulons un schéma d'acquisition en incohérence maximale avec la base de représentation éparse mais nous devons aussi équilibrer le tout avec ce que nous connaissons des données DSI : c'est-à-dire que les données au centre du spectre de diffusion (faible facteur-b) sont essentielles à la reconstruction du propagateur de diffusion. Il existe multiples stratégies de fabrication de schémas d'acquisition intéressants et il reste à dénicher le plus performant.

Concernant les questions 3 et 4, la méthode de minimisation est intimement liée à la formulation du problème CS. Faudrait-il reformuler l'équation CS 4.1 en ajoutant un deuxième terme de régularisation relié à la variation totale, comme le suggère O. Michailovich [29] ? Ou faudrait-il reformuler le problème en utilisant une norme concave telle que la norme $\ell_{1/2}$; quitte à augmenter drastiquement le temps de calcul ? Quelle sera alors la méthode de minimisation la plus efficace ?

Une note concernant la méthode de seuillage : nous avons produit nos résultats à l'aide du seuillage doux ou du seuillage Stein mais il existe une panoplie d'autres méthodes de seuillage à tester. Certains tests préliminaires nous portent à croire que des méthodes de seuillage un peu plus poussées produiraient de meilleurs résultats (e.g. seuillage par bloc).

En améliorant chacun de ces points, la plate-forme CS-DSI sera bonifiée et deviendra de plus en plus riche, performante et efficace.

L'idée centrale de ce mémoire est de sous-échantillonner l'acquisition du spectre de diffusion (l'espace-q) mais il faut garder à l'esprit que notre image est en six dimensions. Les trois dimensions de l'espace-k pourraient elles aussi être sous-échantillonnées. Une nouvelle méthode impliquant le développement d'une nouvelle séquence CS-DWI-EPI sous les contraintes physiques de l'appareillage IRM pourrait voir le jour. Parions qu'un sous-échantillonnage de 50 % de l'espace-k est envisageable [25]. Une telle éventualité nous amènerait à un temps clinique de 15 minutes.

La technologie derrière les systèmes d'IRM est en perpétuelle évolution. En particulier,

CONCLUSION

l'imagerie parallèle possède le potentiel d'accélérer encore plus le temps d'acquisition. Les nouveaux systèmes d'IRM produisent des images de plus en plus précises avec des SNR de plus en plus relevés.

Chaque voxel de notre acquisition DSI mesure $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$: un milieu extrêmement complexe contenant des centaines de milliers de neurones, des millions de cellules gliales (astrocytes, oligodendrocytes, cellules de Schwann, ...), des capillaires, etc. Nos propagateurs sont reconstruits à partir de la diffusion moyenne survenue dans cette structure géométrique complexe et irrégulière. L'augmentation de la résolution de l'acquisition, disons à $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$, produira des résultats moyennés sur des dizaines de milliers de neurones et seront de plus en plus précis et utiles pour le diagnostic médical.

Le chemin est maintenant pavé vers un examen DSI accéléré et nous savons d'ores et déjà qu'une technologie CS étudiée et calibrée précisément aura un rôle important à jouer. La médecine jouira bientôt d'une nouvelle génération d'examens cérébraux de grande qualité grâce au CS-DSI.

CONCLUSION

Annexe A

Sparsity Characterisation of the Diffusion Propagator (ISMRM 2011 abstract)

A.1 Résumé

Le sujet de cet article est de caractériser l'éparsité du propagateur de diffusion provenant des données DSI ; la première étape cruciale vers une solution CS pour le DSI. Nous avons analysé en détails la performance des bases d'ondelettes orthogonales et biorthogonales 3D. Nous exécutons une batterie d'expérimentations synthétiques qualitativement et quantitativement. Nous produisons aussi une analyse qualitative des résultats sur des données naturelles cérébrales. Nos résultats indiquent que la combinaison des ondelettes Cohen-Daubechies-Feauveau (CDF) biorthogonales jumulée avec un seuillage doux non linéaire donne une efficace base de représentation éparsée pour le propagateur de diffusion. Nous montrons que seulement 10 % des coefficients sont suffisants pour reconstruire un propagateur de diffusion de bonne qualité. C'est un résultat prometteur pour une solution CS-DSI réussie.

A.2 Commentaires

Publié dans le cadre de la conférence ISMRM 2011 à Montréal, CANADA.

INTRODUCTION: Compressed Sensing (CS) can be seen as a recipe with three ingredients: a sparse basis to represent the data, a maximally incoherent sensing/sampling basis and a nonlinear convex method that usually minimize the ℓ_1 -norm and/or the total variation semi-norm [1]. Recent works have mostly focused on ingredients 1-2-3 in the HARDI/DTI (High Angular Resolution Diffusion Imaging/Diffusion Tensor Imaging) CS problem [2,3,4]. Here, we focus on the problem of finding the best sparse basis to represent the diffusion propagator in diffusion-weighted imaging. Under the narrow pulse approximation, the diffusion propagator framework relates the diffusion signal and diffusion propagator through a Fourier relationship, $P(r) = F[S(q)/S_0]$, where F is the Fourier transform operator, $S(q)$ is the Diffusion Spectrum Imaging (DSI) data [5] and S_0 is the b -value = 0 s/mm^2 signal. Since the propagator itself can be viewed as a 3-dimensional (3D) image, we choose to attack to problem with the state-of-the-art wavelets armada [6] extended in 3D. Note that a preliminary study [7] used a Daubechies-8 (D8) wavelet basis to show the potential of CS for DSI. Related to the second ingredient, [8] has explored different sampling strategies to accelerate DSI. Here, we executed a battery of experiment on both synthetic and human brain data to answer these specific questions: What is the best sparsifying wavelet transform for the diffusion propagator representation? Are the biorthogonal wavelet transforms showing improvements over standard orthogonal transforms? What is the best approximation scheme for optimal quality of the sparse diffusion propagator reconstruction; hard and soft thresholding?

METHODS: We created various synthetic DSI signals based on real-data schemes of [5]. We generated 515 direction vectors sampled on the Cartesian lattice inside a ball of radius 5 and a maximum b -value of 6000 s/mm^2 . We also used 1-fiber, 2-fibers crossing at angles of 45°, 60° and 90°, 3-fibers crossing at 90° signals with respective equal volume compartments having Fractional Anisotropy (FA) of 0.8. We also contaminated the signals with a Rician noise level of $\sigma = 0.01, 0.02, 0.03333$, to obtain SNR = 100, 50, and 33 in the baseline image S_0 . The 3D wavelets transforms implemented are: Haar, D4, D8, CDF 5-3, CDF 9-7, where D stands for Daubechies and CDF stands for Cohen-Daubechies-Fauveau [6]. We also performed two nonlinear thresholding methods to sparsify the diffusion propagators: namely hard and soft thresholding [6]. For our similarity and quality metrics, we used SNR, relative error and Kullback-Leibler divergence (KL-div) to quantify the resemblance of the reconstructed sparse diffusion propagator with the original noiseless diffusion propagator. We also exhaustively produced 3D visualization figures for a qualitative analysis. For the DSI human brain data, the acquisition was performed on a 3-Tesla Philips magnetic resonance system, max b -value = 6000 s/mm^2 , 2 mm isotropic voxels, 515 gradient directions (same as our synthetic experiment) and a Echo Planar Imaging (EPI) sequence with parallel imaging with an acceleration factor of 2. The DSI acquisition time was 1h45 minutes. In this dataset, we chose several voxels of interest to reconstruct the diffusion propagator; a 1-fiber voxel in the corpus callosum, an isotropic voxel in the ventricles, and a 2-fiber crossing voxel between the corona radiata (CR) and the superior longitudinal fasciculus (SLF).

RESULTS: Tables 1 and 2 show the KL-div results for various synthetic DSI signal configurations. Table 1 highlights a simulation with Rician noise level of $\sigma=0.01$ and only 11% of the wavelets coefficients used in the propagator reconstruction. In this case, the best reconstructions are achieved with the biorthogonal CDF 9-7 basis and a nonlinear soft threshold. Similarly, Table 2 highlights a simulation with noise level of $\sigma=0.02$ and approximation with only 5% of the wavelets coefficients. In that case, the best reconstructions are achieved with the biorthogonal CDF 5-3 basis and a nonlinear soft threshold. Figure 1 shows a 3D diffusion propagator from a voxel in the CR-SLF section of a human brain. This visual representation is formed by isosurfaces using regular sampling intervals. Figure 1A shows the original diffusion propagator, 1B the approximation using a nonlinear soft threshold with 1% of the coefficients and, 1C, by 7% of the coefficients. In that case, 7% is enough to obtain an accurate approximation. Figure 2 shows the SNR and relative error curves obtained when comparing a noisy synthetic two-fibers bundle crossing at 90° and its perfect noiseless signal. Using the CDF 5-3, we can see that our best SNR and relative error are between 5% and 13% of coefficients, demonstrating the value of combining biorthogonal wavelets, nonlinear soft thresholding and the good percentage of coefficients in the diffusion propagator approximation.

KL-div	Haar		D4		D8		CDF 5-3		CDF 9-7	
Thresholding	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft
2 fibers 90°	0.09	0.12	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.06	0.08	0.06
2 fibers 45°	0.10	0.11	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.08	0.06
2 fibers 60°	0.10	0.11	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.06	0.08	0.06
3 fibers 90°	0.09	0.10	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.06	0.08	0.06

Table 1. KL-div from synthetic data, keeping 11% of coefficients, Rician noise: $\sigma=0.01$. Best results are obtained for CDF 9-7 in bold.

KL-div	Haar		D4		D8		CDF 5-3		CDF 9-7	
Thresholding	hard	soft	hard	soft	hard	soft	hard	soft	hard	soft
2 fibers 90°	0.25	0.26	0.20	0.20	0.20	0.20	0.17	0.13	0.18	0.14
2 fibers 45°	0.25	0.24	0.20	0.20	0.20	0.20	0.18	0.15	0.19	0.15
2 fibers 60°	0.24	0.22	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.12	0.17	0.14
3 fibers 90°	0.22	0.22	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.13	0.16	0.13

Table 2. KL-div from synthetic data, keeping 5% of coefficients, Rician noise: $\sigma=0.02$. Best results are obtained for CDF 5-3 in bold.

DISCUSSION & CONCLUSIONS: Our recommendation for the best 3D wavelet basis to obtain a sparse diffusion propagator representation is the biorthogonal CDF wavelets with a nonlinear soft threshold. This is true from both a quantitative and qualitative point of view. As demonstrated in [6], the lifting scheme used for biorthogonal wavelet transform manages well the boundary effects and usually performs better than the periodic scheme used in orthogonal wavelet. The benefits are even more present when the Rician noise level increases, most importantly for high b -value images at the boundary of q -space. This is an important issue for DSI. Also, note that both D4 and D8 performed exactly the same way in the quantitative KL-div experiment, which suggests that the number of vanishing moments or compact support of wavelets have little effect on the sparse diffusion propagator representation. This is also seen in the quantitative comparison of CDF 5-3 and CDF 9-7. It also appears that biorthogonal wavelet transforms perform well to sparsify the diffusion propagator in a real human brain dataset. As in our synthetic experiments, our real data results show that approximately 7% of the wavelets coefficients of a CDF basis used in conjunction with a nonlinear soft thresholding are adequate to approximate all types of diffusion propagators. This is a promising result as 1st ingredient of a compressed sensing solution for DSI. **REFERENCES:** [1] Candès et al, IEEE Signal Process. Mag. 2008. [2] Michailovich & Rathi, MICCAI 2010. [3] B. Landman et al, ISMRM 2010. [4] Merlet & Deriche, MICCAI workshop. [5] Wedeen et al, MRM 2005. [6] Mallat, A wavelet tour of signal processing, 3rd edition, 2009. [7] Lee et al, ISMRM 2010. [8] Menzel et al, ISMRM 2010.

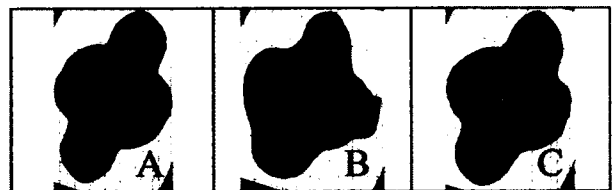


Figure 1. The diffusion propagator of a voxel of interest in the CR-SLF section of a human brain. A- Original diffusion propagator. B- Approximation based on a CDF 9-7 wavelets transform and nonlinear soft thresholding keeping 1% of the coefficients and C- keeping 7% of the coefficients. In that case, 7% is enough to obtain an accurate approximation.

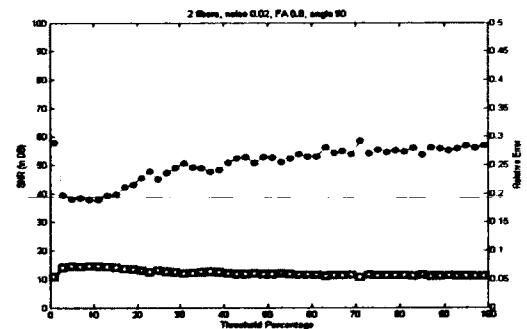


Figure 2. SNR (blue squares) and relative error (green circles) when comparing a noisy (rician noise level of : $\sigma=0.02$) synthetic two-fibers bundle crossing at 90° with the perfect noiseless signal. Here we used a CDF 5-3 wavelets basis with nonlinear soft thresholding. Note that the best performances are achieved between 5% and 13 % of coefficients.

Annexe B

Sparsity Characterization of the Diffusion Propagator (full paper)

B.1 Résumé

Le sujet de cet article est de caractériser l'éparsité du propagateur de diffusion provenant des données DSI ; la première étape cruciale vers une solution CS pour le DSI. Nous avons analysé en détails la performance des bases d'ondelettes orthogonales et biorthogonales 3D. Nous exécutons une batterie d'expérimentations synthétiques qualitativement et quantitativement. Nous produisons aussi une analyse qualitative des résultats sur des données naturelles cérébrales. Nos résultats indiquent que la combinaison des ondelettes Cohen-Daubechies-Feauveau (CDF) biorthogonales jumulée avec un seuillage doux non linéaire donne une efficace base de représentation éparse pour le propagateur de diffusion. Nous montrons que seulement 10 % des coefficients sont suffisants pour reconstruire un propagateur de diffusion de bonne qualité. C'est un résultat prometteur pour une solution CS-DSI réussie.

B.2 Commentaires

Soumis à la conférence IPMI 2011 à Irsee, ALLEMAGNE.

Sparsity Characterization of the Diffusion Propagator

Etienne Saint-Amant¹ and Maxime Descoteaux¹

¹MOIVRE Center, Computer Science department, Université de Sherbrooke

Abstract. This paper focuses on characterizing the sparsity of diffusion propagator from Diffusion Spectrum Imaging (DSI) data; the first crucial step towards a compressed sensing solution for DSI. We extensively analyze the performance of 3D orthogonal wavelet bases and biorthogonal wavelet bases. We perform a quantitative synthetic simulations and a qualitative analysis in a human brain DSI dataset. Our results show that the combination of Cohen-Daubechies-Feauveau (CDF) biorthogonal wavelet decomposition with a soft thresholding approximation the best sparse representation of the diffusion propagator. We show that using only 10% of the coefficients is enough to reconstruct a good quality diffusion propagator. This is a promising result for a successful CS solution to DSI.

1 Introduction

Compressed Sensing (CS) can be seen as a recipe with three ingredients: i) a sparse basis to represent the data, ii) a maximally incoherent sensing/sampling basis, and iii) a nonlinear convex method that usually minimizes the ℓ_1 -norm and/or the total variation semi-norm [1, 2]. Since the pioneer work of Lustig et al. [3] that proposed a CS solution to magnetic resonance imaging (MRI), CS has shown promising results to accelerate acquisitions, improve image quality and image resolution. In diffusion MRI, recent works have mostly focused on ingredients i), ii), and iii) in HARDI/DTI (High Angular Resolution Diffusion Imaging/Diffusion Tensor Imaging) experiments to reconstruct an orientation distribution function (ODF) using a CS technique [4–7]. [7] also propose a CS solution to diffusion propagator reconstruction but their solution is based directly on the sensing basis, in Fourier space. They do not use a sparsifying basis.

Here, we focus on the problem of finding the best sparse basis to represent the diffusion propagator in diffusion-weighted imaging (DWI). Since the propagator itself can be viewed as a 3-dimensional (3D) image, we choose to attack to problem with the state-of-the-art wavelets armada [8] extended in 3D. Note that a preliminary study [9] used a Daubechies-8 (D8) wavelet sparsifying basis for a CS solution to DSI. Moreover, related to the non-uniform undersampled scheme, [10] have explored different sampling strategies to accelerate DSI.

In this work, we perform a battery of quantitative experiments on both synthetic and real human brain DSI data to answer the following specific questions: What is the best sparsifying wavelet transform (W.T.) for the diffusion propagator representation? Are the biorthogonal wavelet transforms showing improvements over standard orthogonal transforms? What is the best approximation

scheme for optimal quality of the sparse diffusion propagator reconstruction; hard or soft thresholding? These questions lead to the powerful conclusion that a biorthogonal CDF wavelet basis allows one to keep only approximately 10% of coefficients for an accurate diffusion propagator reconstruction. This is the first ingredient needed for a robust and successful CS solution for 3D DWI.

2 Methods

2.1 Diffusion MRI

Under the narrow pulse approximation [11], the relationship between the diffusion signal, $E(\mathbf{q})$, in \mathbf{q} -space and the ensemble average diffusion propagator, $P(\mathbf{r})$, in real space, is given by a Fourier transform (F.T.) relationship [12] such that

$$P(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3} E(\mathbf{q}) e^{-2\pi i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{q}, \quad (1)$$

where $E(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q})/S_0$, where $S(\mathbf{q})$ is the diffusion signal measured at position \mathbf{q} in \mathbf{q} -space, and S_0 is the baseline image acquired without any diffusion sensitization ($q = 0$). We denote $q = |\mathbf{q}|$ and $\mathbf{q} = q\mathbf{u}$, $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$, where \mathbf{u} is a 3D unit vector. The wave vector \mathbf{q} is $\mathbf{q} = \gamma\delta\mathbf{G}/2\pi$, with γ the nuclear gyromagnetic ratio and $\mathbf{G} = g\mathbf{u}$ the applied diffusion gradient vector. The norm of the wave vector, q , is related to the diffusion weighting factor (the b-value), $b = 4\pi^2 q^2 \tau$, where $\tau = \Delta - \delta/3$ is effective diffusion time with δ the time of the applied diffusion sensitizing gradients and Δ the time between the two pulses.

Eq. 1 suggests a fairly straightforward way to reconstruct the diffusion propagator; acquiring as many diffusion-weighted images $E(\mathbf{q})$, along as many \mathbf{q} -vectors \mathbf{q} as possible, before taking a Fourier transform to obtain the diffusion propagator $P(\mathbf{r})$. This is at the heart of \mathbf{q} -space imaging [12], in 1-dimension (1D), or, in 3D, Diffusion Spectrum Imaging (DSI) [13]. The problem of DSI is that it can take several hours to acquire these high-dimensional DWI datasets. Therefore, a CS solution to DSI is of utmost importance to accelerate these acquisitions and make them accessible for the clinic.

2.2 Sparse representation of the diffusion propagator

Wavelet Bases As shown in Table 1, we implemented the 3D version of the state-of-the-art wavelet transforms: i) orthogonal (Haar, Daubechies), and ii) biorthogonal (Haar, Cohen-Daubechies-Feauveau (CDF 5-3, CDF 9-7)). A periodic scheme is used for Daubechies implementations whereas, a more robust lifting scheme implementation is used for Haar, CDF 5-3 and CDF 9-7. These wavelet bases have been extensively studied in image processing [8]. In general, the lifting scheme is more robust to boundary effects of signals and images.

Wavelet type	Orthogonality	Implementation
Haar	orthogonal/biorthogonal	lifting
D4	orthogonal	periodic
D8	orthogonal	periodic
CDF 5-3	biorthogonal	lifting
CDF 9-7	biorthogonal	lifting

Table 1: Wavelet name, orthogonality, implementation used in the paper.

Nonlinear approximation Signal approximation in sparse representation is done by a thresholding operation. Linear approximation keeps the $k\%$ *first* coefficients of the representation whereas nonlinear approximation keeps the $k\%$ *largest* coefficients. It has been shown in [8] that nonlinear approximation is systematically better than linear approximation for wavelet transforms. We used two types of nonlinear thresholding method; namely hard and soft thresholding, defined by the following equations:

$$S_T^{hard}(x) = \begin{cases} x & \text{if } |x| > T \\ 0 & \text{if } |x| \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

$$S_T^{soft}(x) = x \cdot \max\left(\frac{1-T}{|x|}, 0\right). \quad (3)$$

The processing pipeline transforming the raw diffusion signal $E(\mathbf{q})$ into the the diffusion propagator $P(\mathbf{r})$, and into a sparse diffusion propagator $\tilde{P}(\mathbf{r})$ is illustrated in Fig. 1.

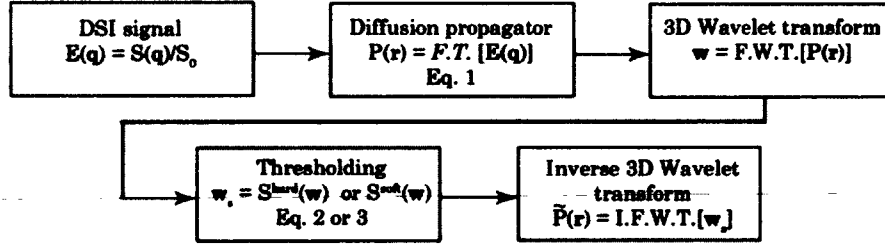


Fig. 1: The diffusion propagator sparsifying pipeline.

2.3 Quality metrics

The quality metrics used to evaluate the quality of diffusion propagator reconstruction are signal-to-noise ratio (SNR), relative squared error (RE) and the Kullback-Leibler divergence (KL-div).

Lets denote $P(\mathbf{r})$ as the perfect noiseless propagator, $\tilde{P}(\mathbf{r})$ as the sparse propagator after thresholding operation in the proper wavelet representation, and \mathbf{R}_Ω as the set of all indices where $P(\mathbf{r})$ is not zero. Also, let

$$P_1(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r})}{\sum_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}_\Omega} P(\mathbf{r})}, \quad \tilde{P}_1(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{P}(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r})}{\sum_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}_\Omega} \tilde{P}(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r})}$$

denote the normalized noiseless propagator and the normalized reconstructed propagator respectively, where $\epsilon(\mathbf{r}) = 10^{-6} \forall \mathbf{r}$. Now, we can define SNR, Relative Error and KL-div as:

$$\text{SNR} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\|P(\mathbf{r})\|_2}{\|P(\mathbf{r}) - \tilde{P}(\mathbf{r})\|_2} \right) \quad (4)$$

$$\text{Relative Error} = \frac{\|P(\mathbf{r}) - \tilde{P}(\mathbf{r})\|_2}{\|P(\mathbf{r})\|_2} \quad (5)$$

$$\text{KL-div} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}_\Omega} P_1(\mathbf{r}) \cdot \log_2 \frac{P_1(\mathbf{r})}{\tilde{P}_1(\mathbf{r})} \quad (6)$$

The KL-div is a non-symmetric measure of the difference between two probability distributions. KL-div measures the expected number of extra bits required to code samples from $P(\mathbf{r})$ when using a code based on $\tilde{P}(\mathbf{r})$, rather than using a code based on $P(\mathbf{r})$ [14]. In this paper, we choose KL-div as our preferred metric to compare two diffusion propagator reconstructions. Also, since no metric is perfect, we included various visualizations of the propagators for a qualitative appreciation.

2.4 Experimental Data

Synthetic Experiments We created various synthetic DSI signals based on the multiple tensor model: $S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \exp(\mathbf{q}^T D_n \mathbf{q})$,

where n is number of fiber compartments with tensor profile D_n and \mathbf{q} are generated using 515 direction vectors sampled on the Cartesian lattice inside a ball of radius 5 with a maximum b-value of 6000 s/mm², as in [13].

(see Fig. 2). We also used 1-fiber, 2-fibers crossing at angles of 45°, 60° and 90°, 3-fibers crossing at 90° signals with

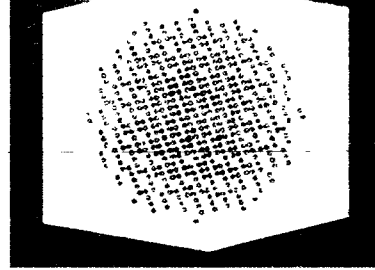


Fig. 2: The 515 DSI directions.

respective equal volume compartments having Fractional Anisotropy (FA) of 0.8 (see Fig. 3). We also contaminated the signals with a Rician noise level of $\sigma = 0.01, 0.02, 0.03333$, to obtain $\text{SNR} = 100, 50$, and 33 in the baseline image S_0 . These SNR values seem high but, in DSI, the signal is rapidly degraded for directions orthogonal to fiber configurations at high b-value near the boundaries of q-space. Reporting a valid SNR value for DWI remains an open question. These values of SNR are realistic and in agreement with our S_0 image from our real datasets.



Fig. 3: (a) Perfect noiseless propagator of 2 fibers crossing at 90° , (b) of 2 fibers crossing at 45° , (c) of 2 fibers crossing at 60° and (d) of 3 fibers crossing at 90° .

DSI database A DSI human brain acquisition was performed on a 3-Tesla Philips magnetic resonance system, maximum b-value = 6000 s/mm^2 , 2 mm isotropic voxels, 515 gradient directions (same as our synthetic experiment) [13] and a Echo Planar Imaging (EPI) sequence with parallel imaging and an acceleration factor of 2. The acquisition time of this DSI dataset was 1h45 minutes. The SNR of the S_0 image dataset was estimated to be 36. It was computed using a region-of-interest (ROI) in the background and a ROI in the corticospinal tract of the S_0 image.



In this dataset, we choose a subsection of a coronal slice of interest (see Fig. 4) to reconstruct the diffusion propagators. This anatomical subsection displays parts of the corpus callosum (CC), of the corona radiata (CR) and the superior longitudinal fasciculus (SLF). Particularly, we can observe various fiber bundles in those regions, such as 1-fiber and 2 or 3-fibers crossing in the same voxel. This subsection also contains several ventricle and gray matter voxels where the diffusion is isotropic.

Fig. 4: FA of the coronal slice of interest.

3 Results

3.1 Synthetic Simulations

KL-div Thresholding	Haar		D4		D8		CDF 5-3		CDF 9-7	
	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft
2 fibers 90°	0.09	0.12	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.06	0.08	0.06
2 fibers 45°	0.10	0.11	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.08	0.06
2 fibers 60°	0.10	0.11	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.06	0.08	0.06
3 fibers 90°	0.09	0.10	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.06	0.08	0.06

Table 2: KL-div from synthetic data, keeping 11% of coefficients, Rician noise: $\sigma = 0.01$. Best results are obtained for CDF 9-7 in bold.

KL-div Thresholding	Haar		D4		D8		CDF 5-3		CDF 9-7	
	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft
2 fibers 90°	0.25	0.26	0.20	0.20	0.20	0.20	0.17	0.13	0.18	0.14
2 fibers 45°	0.25	0.24	0.20	0.20	0.20	0.20	0.18	0.15	0.19	0.15
2 fibers 60°	0.24	0.22	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.12	0.17	0.14
3 fibers 90°	0.22	0.22	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.13	0.16	0.13

Table 3: KL-div from synthetic data, keeping 5% of coefficients, Rician noise: $\sigma = 0.02$. Best results are obtained for CDF 5-3 in bold.

KL-div Thresholding	Haar		D4		D8		CDF 5-3		CDF 9-7	
	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft	Hard	Soft
2 fibers 90°	0.35	0.36	0.35	0.35	0.35	0.36	0.34	0.32	0.34	0.29
2 fibers 45°	0.35	0.35	0.35	0.36	0.36	0.36	0.35	0.30	0.35	0.31
2 fibers 60°	0.30	0.29	0.31	0.31	0.31	0.31	0.30	0.25	0.29	0.25
3 fibers 90°	0.33	0.31	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.27	0.33	0.27

Table 4: KL-div from synthetic data, keeping 17% of coefficients, Rician noise: $\sigma = 0.03333$. Best results are obtained for CDF 9-7 in bold.

Here, we explore the various performances of the wavelet transforms to represent synthetic diffusion propagators. We always use our quality metrics to compare the reconstruction of a noisy diffusion propagator with its perfect noiseless representation. The reason why we do not achieve the best performance by keeping 100% of the coefficients is that we are also reconstructing the noise. We did

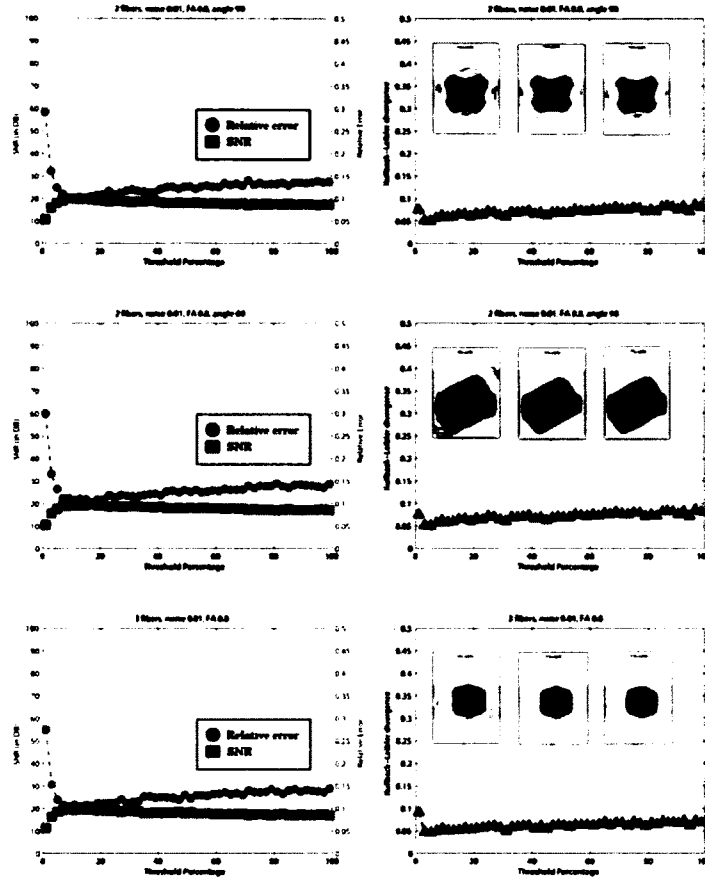


Fig. 5: SNR, relative error and KL-div metrics for 2 fibers crossing at 90° (first row), crossing at 60° (second row) and 3 fibers crossing at 90° (third row), noise $\sigma = 0.01$, compared with the perfect noiseless propagator. Propagator visualizations (right) are for 5%, 11% and 17% coefficients. The wavelets basis is CDF 9-7 with soft thresholding.

a battery of simulations on synthetic data to identify the best wavelet basis, the best thresholding method, the best threshold percentage and the best qualitative representation.

Table 2 shows the KL-div results for various synthetic DSI signal configurations. It highlights a simulation with Rician noise level of $\sigma = 0.01$ (SNR 100) and 11% of the wavelets coefficients used in the propagator reconstruction. In this case, the best reconstructions are achieved with the biorthogonal CDF 9-7

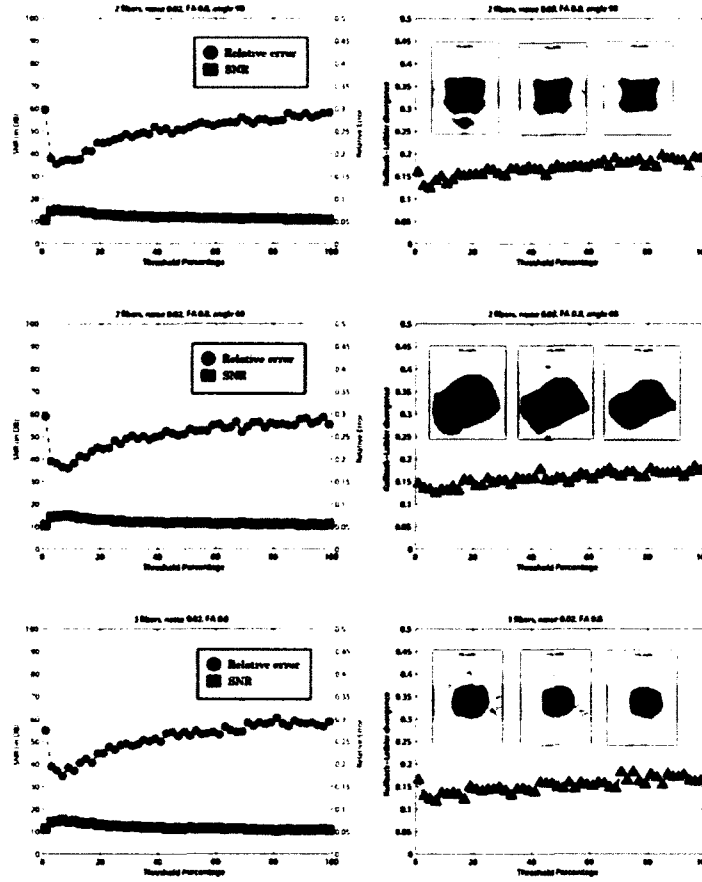


Fig. 6: SNR, relative error and KL-div metrics for 2 fibers crossing at 90° (first row), crossing at 60° (second row) and 3 fibers crossing at 90° (third row), noise $\sigma = 0.02$, compared with the perfect noiseless propagator. Propagator visualizations (right) are for 5%, 11% and 17% coefficients. The wavelets basis is CDF 5-3 with soft thresholding.

basis and a nonlinear soft thresholding. Figure 5 presents the SNR, relative error and KL-div graphs for the CDF 9-7 representation used in conjunction with soft thresholding. We can see in that figure that all reconstructions perform well under this low noise level and in all cases, 5% of coefficients is enough to get an accurate representation.

Similarly, Table 3 highlights a simulation with Rician noise level of $\sigma = 0.02$ (SNR 50) and approximation with only 5% of the wavelets coefficients. In this

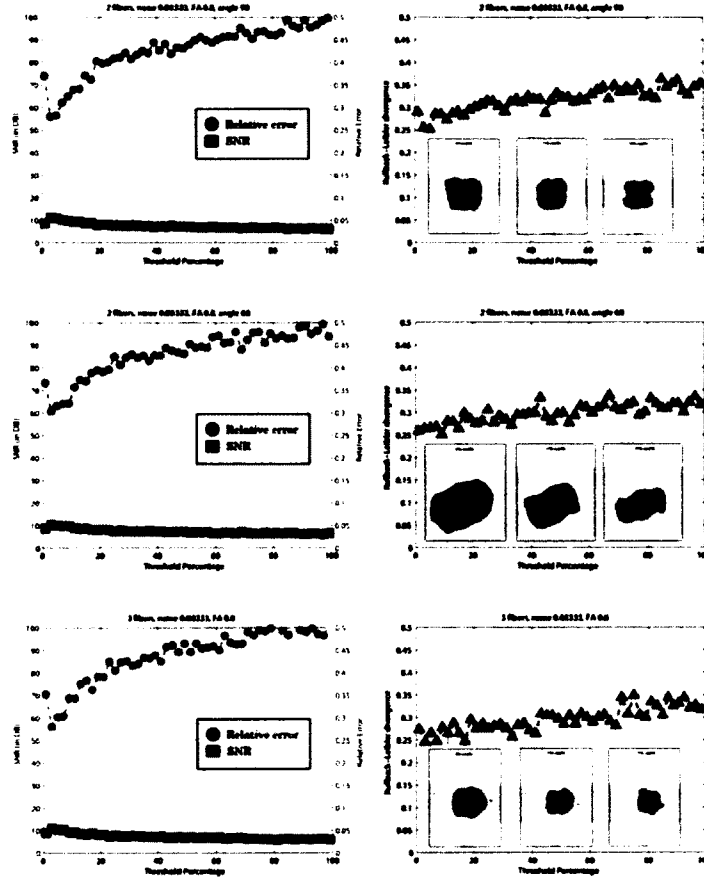


Fig. 7: SNR, relative error and KL-div metrics for 2 fibers crossing at 90° (first row), crossing at 60° (second row) and 3 fibers crossing at 90° (third row), noise $\sigma = 0.02$, compared with the perfect noiseless propagator. Propagator visualizations (right) are for 5%, 11% and 17% coefficients. The wavelets basis is CDF 9-7 with soft thresholding.

case, the best reconstructions are achieved with the biorthogonal CDF 5-3 basis and a nonlinear soft thresholding. Figure 6 presents the SNR, relative error and KL-div graphs for the CDF 5-3 representation used in conjunction with soft thresholding. Even if the KL-div is slightly lower at 5%, we can see that all reconstructions are qualitatively adequate, if 11% or 17% of coefficients are kept.

Again, Table 4 highlights a simulation with Rician noise level of $\sigma = 0.03333$ (SNR 33) and approximation with 17% of the wavelets coefficients. In this case, the best reconstructions are achieved with the biorthogonal CDF 9-7 basis and a nonlinear soft thresholding. Figure 7 presents the SNR, relative error and KL-div graphs for the CDF 9-7 representation used in conjunction with soft threshold. We can see that the propagator is more sensitive to noise at $\sigma = 0.03333$, where the KL-div is already over 0.25. Qualitatively, 2 fiber configurations are adequate at 11% and 17% of coefficients but the 3 fiber configuration is slightly more difficult to see.

Overall, the synthetic experiment, under reasonable noise corruption show that approximately 10% of coefficients preserves the quality of the diffusion propagator.

3.2 DSI Experiments

From the DSI dataset, we extracted the 24 DW images for b-value = 1200 s/mm² to produce the FA map (Fig. 4), the DTI glyphs and ODF glyphs (top left and top right of Fig. 8) of our coronal slice of interest. We then used our whole DSI dataset to produce the corresponding diffusion propagators (bottom of Fig. 8). These glyphs are produced by overlaying several isosurfaces at different radii r of the propagator $P(ru)$. On this field of propagators, we zoomed in a subsection to get a better visualization (Fig. 9). Finally, we produced the same field while using 10% of the coefficients of the CDF 9-7 basis with soft thresholding.

4 Discussion

Our recommendation for the best 3D wavelet basis to obtain a sparse diffusion propagator representation is the biorthogonal CDF wavelets with a nonlinear soft thresholding. This is true from both a quantitative and qualitative point of view. As demonstrated in [8], the lifting scheme used for biorthogonal wavelet transform manages the boundary effects in wavelet decomposition and usually performs better than the periodic scheme used in orthogonal wavelet. The benefits are even more present in our DSI application, where the Rician noise level increases is most important for high b-value images at the boundary of q-space.

Also, note that both D4 and D8 performed exactly the same way in the quantitative KL-div experiment, which suggests that the number of vanishing moments or compact support of wavelets have little effect on the sparse diffusion propagator representation. This is also seen in the quantitative comparison of CDF 5-3 and CDF 9-7. The orthogonal Daubechies transforms were slightly inferior to the CDF biorthogonal transforms. Moreover, we have also shown that biorthogonal wavelet transforms perform well to sparsify the diffusion propagator in a real human brain dataset. As in our synthetic experiments, our real data results show that approximately 10% of the wavelets coefficients of a CDF basis used in conjunction with a nonlinear soft thresholding are adequate to approximate all types of diffusion propagators. This is a promising result as 1st ingredient of a successful compressed sensing solution for DSI.

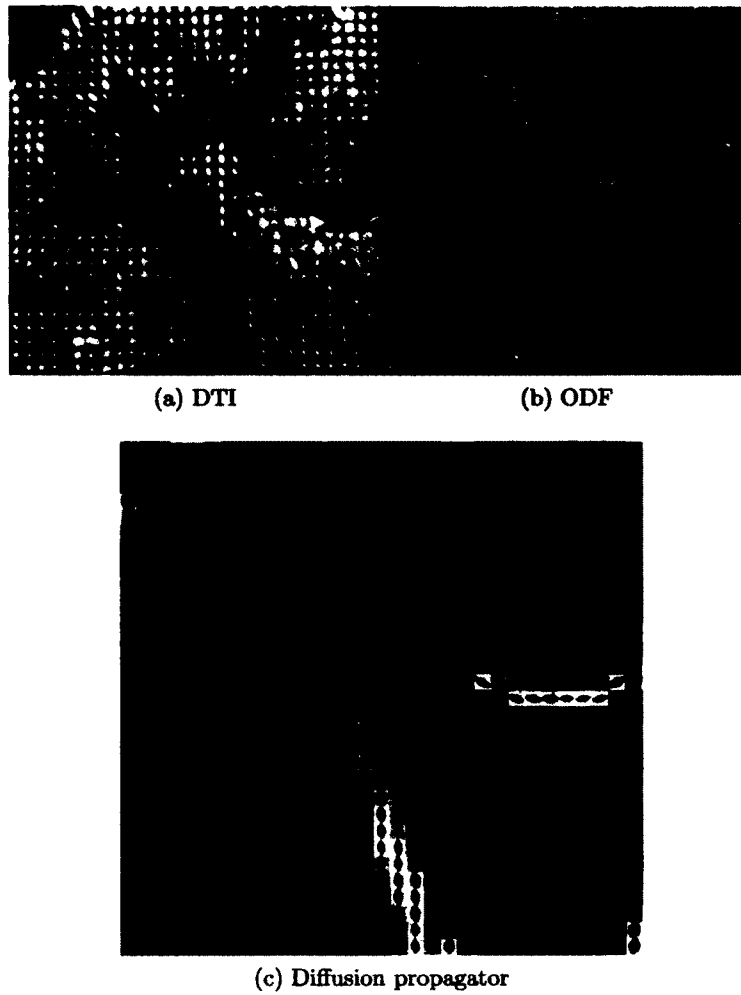


Fig. 8: Diffusion glyphs over a coronal slice.

References

1. Candes, E.J.: Compressive sampling. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. (2006)
2. Donoho, D.: Compressed sensing. Information Theory, IEEE Transactions on **52**(4) (2006) 1289–1306
3. Lustig, M., Donoho, D., Pauly, J.M.: Sparse mri: The application of compressed sensing for rapid mr imaging. Magnetic Resonance in Medicine **58**(6) (2007) 1182–1195



Fig. 9: (a) Detailed propagator glyphs using 20 isosurfaces without wavelets approximation and, (b), with 10% of CDF 9-7 basis and soft thresholding.

4. Michailovich, O., Rathi, Y.: Fast and accurate reconstruction of HARDI data using compressed sensing. In: Lecture Notes in Computer Science. Volume 6361., Beijing, China, MICCAI (2010) 606–613
5. Landman, B.A., Wan, H., Bogovic, J.A., van Zijl, P.C., Bazin, P.L., Prince, J.L.: In the pursuit of intra-voxel fiber orientations: Comparison of compressed sensing dti and q-ball mri. In: 18th Annual Meeting of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine (ISMRM). (2010)
6. Landman, B.A., Wan, H., Bogovic, J.A., van Zijl, P.C., Bazin, P.L., Prince, J.L.: Accelerated compressed sensing of diffusion-inferred intra-voxel structure through adaptive refinement. In: 18th Annual Meeting of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine (ISMRM). (2010)
7. Merlet, S., Deriche, R.: Compressed Sensing for Accelerated EAP Recovery in Diffusion MRI. In: Computational diffusion MRI workshop, MICCAI, Beijing, China (2010) 14–25
8. Mallat, D.S.: A Wavelet Tour of Signal Processing: the sparse way. 3rd edn. Academic Press (1999)
9. Lee, N., Singh, M.: Compressed sensing based diffusion spectrum imaging. In: 18th Annual Meeting of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine (ISMRM). (2010)
10. Menzel, M.I., Khare, K., King, K.F., Tao, X., Hardy, C.J., Marinelli, L.: Accelerated diffusion spectrum imaging in the human brain using compressed sensing. In: 18th Annual Meeting of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine (ISMRM). (2010)
11. Stejskal, E., Tanner, J.: Spin diffusion measurements: spin echoes in the presence of a time-dependent field gradient. *Journal of Chemical Physics* **42** (1965) 288–292.
12. Callaghan, P.T.: Principles of nuclear magnetic resonance microscopy. Oxford University Press, Oxford (1991)

13. Wedeen, V.J., Hagmann, P., Tseng, W.Y.I., Reese, T.G., Weisskoff, R.M.: Mapping complex tissue architecture with diffusion spectrum magnetic resonance imaging. *Magnetic Resonance in Medicine* **54**(6) (2005) 1377–1386
14. Kullback, S., Leibler, R.A.: On information and sufficiency. *Ann. Math. Statistics* **22**(1) (1951) 79–86

Annexe C

Liste des directions du gradient de diffusion et du facteur-b correspondant

ANNEXE C. LISTE DES DIRECTIONS DU GRADIENT DE DIFFUSION

No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b
1	-5	0	0	6000	63	-3	1	0	2400	125	-2	1	2	2160	187	-1	0	4	4080	249	0	-1	1	480
2	-4	-3	0	6000	64	-3	1	1	2640	126	-2	1	3	3360	188	-1	1	-4	4320	250	0	-1	2	1200
3	-4	-2	-2	5760	65	-3	1	2	3360	127	-2	1	4	5040	189	-1	1	-3	2640	251	0	-1	3	2400
4	-4	-2	-1	5040	66	-3	1	3	4560	128	-2	2	-4	5760	190	-1	1	-2	1440	252	0	-1	4	4080
5	-4	-2	0	4800	67	-3	2	-3	5280	129	-2	2	-3	4080	191	-1	1	-1	720	253	0	0	-5	6000
6	-4	-2	1	5040	68	-3	2	-2	4080	130	-2	2	-2	2880	192	-1	1	0	480	254	0	0	-4	3840
7	-4	-2	2	5760	69	-3	2	-1	3360	131	-2	2	-1	2160	193	-1	1	1	720	255	0	0	-3	2160
8	-4	-1	-2	5040	70	-3	2	0	3120	132	-2	2	0	1920	194	-1	1	2	1440	256	0	0	-2	960
9	-4	-1	-1	4320	71	-3	2	1	3360	133	-2	2	1	2160	195	-1	1	3	2640	257	0	0	-1	240
10	-4	-1	0	4080	72	-3	2	2	4080	134	-2	2	2	2880	196	-1	1	4	4320	258	0	0	0	0
11	-4	-1	1	4320	73	-3	2	3	5280	135	-2	2	3	4080	197	-1	2	-4	5040	259	0	0	1	240
12	-4	-1	2	5040	74	-3	3	-2	5280	136	-2	2	4	5760	198	-1	2	-3	3360	260	0	0	2	960
13	-4	0	-3	6000	75	-3	3	-1	4560	137	-2	3	-3	5280	199	-1	2	-2	2160	261	0	0	3	2160
14	-4	0	-2	4800	76	-3	3	0	4320	138	-2	3	-2	4080	200	-1	2	-1	1440	262	0	0	4	3840
15	-4	0	-1	4080	77	-3	3	1	4560	139	-2	3	-1	3360	201	-1	2	0	1200	263	0	0	5	6000
16	-4	0	0	3840	78	-3	3	2	5280	140	-2	3	0	3120	202	-1	2	1	1440	264	0	1	-4	4080
17	-4	0	1	4080	79	-3	4	0	6000	141	-2	3	1	3360	203	-1	2	2	2160	265	0	1	-3	2400
18	-4	0	2	4800	80	-2	-4	-2	5760	142	-2	3	2	4080	204	-1	2	3	3360	266	0	1	-2	1200
19	-4	0	3	6000	81	-2	-4	-1	5040	143	-2	3	3	5280	205	-1	2	4	5040	267	0	1	-1	480
20	-4	1	-2	5040	82	-2	-4	0	4800	144	-2	4	-2	5760	206	-1	3	-3	4560	268	0	1	0	240
21	-4	1	-1	4320	83	-2	-4	1	5040	145	-2	4	-1	5040	207	-1	3	-2	3360	269	0	1	1	480
22	-4	1	0	4080	84	-2	-4	2	5760	146	-2	4	0	4800	208	-1	3	-1	2640	270	0	1	2	1200
23	-4	1	1	4320	85	-2	-3	-3	5280	147	-2	4	1	5040	209	-1	3	0	2400	271	0	1	3	2400
24	-4	1	2	5040	86	-2	-3	-2	4080	148	-2	4	2	5760	210	-1	3	1	2640	272	0	1	4	4080
25	-4	2	-2	5760	87	-2	-3	-1	3360	149	-1	-4	-2	5040	211	-1	3	2	3360	273	0	2	-4	4800
26	-4	2	-1	5040	88	-2	-3	0	3120	150	-1	-4	-1	4320	212	-1	3	3	4560	274	0	2	-3	3120
27	-4	2	0	4800	89	-2	-3	1	3360	151	-1	-4	0	4080	213	-1	4	-2	5040	275	0	2	-2	1920
28	-4	2	1	5040	90	-2	-3	2	4080	152	-1	-4	1	4320	214	-1	4	-1	4320	276	0	2	-1	1200
29	-4	2	2	5760	91	-2	-3	3	5280	153	-1	-4	2	5040	215	-1	4	0	4080	277	0	2	0	960
30	-4	3	0	6000	92	-2	-2	-4	5760	154	-1	-3	-3	4560	216	-1	4	1	4320	278	0	2	1	1200
31	-3	-4	0	6000	93	-2	-2	-3	4080	155	-1	-3	-2	3360	217	-1	4	2	5040	279	0	2	2	1920
32	-3	-3	-2	5280	94	-2	-2	-2	2880	156	-1	-3	-1	2640	218	0	-5	0	6000	280	0	2	3	3120
33	-3	-3	-1	4560	95	-2	-2	-1	2160	157	-1	-3	0	2400	219	0	-4	-3	6000	281	0	2	4	4800
34	-3	-3	0	4320	96	-2	-2	0	1920	158	-1	-3	1	2640	220	0	-4	-2	4800	282	0	3	-4	6000
35	-3	-3	1	4560	97	-2	-2	1	2160	159	-1	-3	2	3360	221	0	-4	-1	4080	283	0	3	-3	4320
36	-3	-3	2	5280	98	-2	-2	2	2880	160	-1	-3	3	4560	222	0	-4	0	3840	284	0	3	-2	3120
37	-3	-2	-3	5280	99	-2	-2	3	4080	161	-1	-2	-4	5040	223	0	-4	1	4080	285	0	3	-1	2400
38	-3	-2	-2	4080	100	-2	-2	4	5760	162	-1	-2	-3	3360	224	0	-4	2	4800	286	0	3	0	2160
39	-3	-2	-1	3360	101	-2	-1	-4	5040	163	-1	-2	-2	2160	225	0	-4	3	6000	287	0	3	1	2400
40	-3	-2	0	3120	102	-2	-1	-3	3360	164	-1	-2	-1	1440	226	0	-3	-4	6000	288	0	3	2	3120
41	-3	-2	1	3360	103	-2	-1	-2	2160	165	-1	-2	0	1200	227	0	-3	-3	4320	289	0	3	3	4320
42	-3	-2	2	4080	104	-2	-1	-1	1440	166	-1	-2	1	1440	228	0	-3	-2	3120	290	0	3	4	6000
43	-3	-2	3	5280	105	-2	-1	0	1200	167	-1	-2	2	2160	229	0	-3	-1	2400	291	0	4	-3	6000
44	-3	-1	-3	4560	106	-2	-1	1	1440	168	-1	-2	3	3360	230	0	-3	0	2160	292	0	4	-2	4800
45	-3	-1	-2	3360	107	-2	-1	2	2160	169	-1	-2	4	5040	231	0	-3	1	2400	293	0	4	-1	4080
46	-3	-1	-1	2640	108	-2	-1	3	3360	170	-1	-1	-4	4320	232	0	-3	2	3120	294	0	4	0	3840
47	-3	-1	0	2400	109	-2	-1	4	5040	171	-1	-1	-3	2640	233	0	-3	3	4320	295	0	4	1	4080
48	-3	-1	1	2640	110	-2	0	-4	4800	172	-1	-1	-2	1440	234	0	-3	4	6000	296	0	4	2	4800
49	-3	-1	2	3360	111	-2	0	-3	3120	173	-1	-1	-1	720	235	0	-2	-4	4800	297	0	4	3	6000
50	-3	-1	3	4560	112	-2	0	-2	1920	174	-1	-1	0	480	236	0	-2	-3	3120	298	0	5	0	6000
51	-3	0	-4	6000	113	-2	0	-1	1200	175	-1	-1	1	720	237	0	-2	-2	1920	299	1	-4	-2	5040
52	-3	0	-3	4320	114	-2	0	0	960	176	-1	-1	2	1440	238	0	-2	-1	1200	300	1	-4	-1	4320
53	-3	0	-2	3120	115	-2	0	1	1200	177	-1	-1	3	2640	239	0	-2	0	960	301	1	-4	0	4080
54	-3	0	-1	2400	116	-2	0	2	1920	178	-1	-1	4	4320	240	0	-2	1	1200	302	1	-4	1	4320
55	-3	0	0	2160	117	-2	0	3	3120	179	-1	0	-4	4080	241	0	-2	2	1920	303	1	-4	2	5040
56	-3	0	1	2400	118	-2	0	4	4800	180	-1	0	-3	2400	242	0	-2	3	3120	304	1	-3	-3	4560
57	-3	0	2	3120	119	-2	1	-4	5040	181	-1	0	-2	1200	243	0	-2	4	4800	305	1	-3	-2	3360
58	-3	0	3	4320	120	-2	1	-3	3360	182	-1	0	-1	480	244	0	-1	-4	4080	306	1	-3	-1	2640
59	-3	0	4	6000	121	-2	1	-2	2160	183	-1	0	0	240	245	0	-1	-3	2400	307	1	-3	0	2400
60	-3	1	-3	4560	122	-2	1	-1	1440	184	-1	0	1	480	246	0	-1	-2	1200	308	1	-3	1	2640
61	-3	1	-2	3360	123	-2	1	0	1200	185	-1	0	2	1200	247	0	-1	-1	480	309	1	-3	2	3360
62	-3	1	-1	2640	124	-2	1	1	1440	186	-1	0	3	2400	248	0	-1	0	240	310	1	-3	3	4560

No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b	No	x	y	z	facteur-b
311	1	-2	-4	5040	352	1	2	1	1440	393	2	-1	0	1200	434	2	4	0	4800	475	3	2	-1	3360
312	1	-2	-3	3360	353	1	2	2	2160	394	2	-1	1	1440	435	2	4	1	5040	476	3	2	0	3120
313	1	-2	-2	2160	354	1	2	3	3360	395	2	-1	2	2160	436	2	4	2	5760	477	3	2	1	3360
314	1	-2	-1	1440	355	1	2	4	5040	396	2	-1	3	3360	437	3	-4	0	6000	478	3	2	2	4080
315	1	-2	0	1200	356	1	3	-3	4560	397	2	-1	4	5040	438	3	-3	-2	5280	479	3	2	3	5280
316	1	-2	1	1440	357	1	3	-2	3360	398	2	0	-4	4800	439	3	-3	-1	4560	480	3	3	-2	5280
317	1	-2	2	2160	358	1	3	-1	2640	399	2	0	-3	3120	440	3	-3	0	4320	481	3	3	-1	4560
318	1	-2	3	3360	359	1	3	0	2400	400	2	0	-2	1920	441	3	-3	1	4560	482	3	3	0	4320
319	1	-2	4	5040	360	1	3	1	2640	401	2	0	-1	1200	442	3	-3	2	5280	483	3	3	1	4560
320	1	-1	-4	4320	361	1	3	2	3360	402	2	0	0	960	443	3	-2	-3	5280	484	3	3	2	5280
321	1	-1	-3	2640	362	1	3	3	4560	403	2	0	1	1200	444	3	-2	-2	4080	485	3	4	0	6000
322	1	-1	-2	1440	363	1	4	-2	5040	404	2	0	2	1920	445	3	-2	-1	3360	486	4	-3	0	6000
323	1	-1	-1	720	364	1	4	-1	4320	405	2	0	3	3120	446	3	-2	0	3120	487	4	-2	-2	5760
324	1	-1	0	480	365	1	4	0	4080	406	2	0	4	4800	447	3	-2	1	3360	488	4	-2	-1	5040
325	1	-1	1	720	366	1	4	1	4320	407	2	1	-4	5040	448	3	-2	2	4080	489	4	-2	0	4800
326	1	-1	2	1440	367	1	4	2	5040	408	2	1	-3	3360	449	3	-2	3	5280	490	4	-2	1	5040
327	1	-1	3	2640	368	2	-4	-2	5760	409	2	1	-2	2160	450	3	-1	-3	4560	491	4	-2	2	5760
328	1	-1	4	4320	369	2	-4	-1	5040	410	2	1	-1	1440	451	3	-1	-2	3360	492	4	-1	-2	5040
329	1	0	-4	4080	370	2	-4	0	4800	411	2	1	0	1200	452	3	-1	-1	2640	493	4	-1	-1	4320
330	1	0	-3	2400	371	2	-4	1	5040	412	2	1	1	1440	453	3	-1	0	2400	494	4	-1	0	4080
331	1	0	-2	1200	372	2	-4	2	5760	413	2	1	2	2160	454	3	-1	1	2640	495	4	-1	1	4320
332	1	0	-1	480	373	2	-3	-3	5280	414	2	1	3	3360	455	3	-1	2	3360	496	4	-1	2	5040
333	1	0	0	240	374	2	-3	-2	4080	415	2	1	4	5040	456	3	-1	3	4560	497	4	0	-3	6000
334	1	0	1	480	375	2	-3	-1	3360	416	2	2	-4	5760	457	3	0	-4	6000	498	4	0	-2	4800
335	1	0	2	1200	376	2	-3	0	3120	417	2	2	-3	4080	458	3	0	-3	4320	499	4	0	-1	4080
336	1	0	3	2400	377	2	-3	1	3360	418	2	2	-2	2880	459	3	0	-2	3120	500	4	0	0	3840
337	1	0	4	4080	378	2	-3	2	4080	419	2	2	-1	2160	460	3	0	-1	2400	501	4	0	1	4080
338	1	1	-4	4320	379	2	-3	3	5280	420	2	2	0	1920	461	3	0	0	2160	502	4	0	2	4800
339	1	1	-3	2640	380	2	-2	-4	5760	421	2	2	1	2160	462	3	0	1	2400	503	4	0	3	6000
340	1	1	-2	1440	381	2	-2	-3	4080	422	2	2	2	2880	463	3	0	2	3120	504	4	1	-2	5040
341	1	1	-1	720	382	2	-2	-2	2880	423	2	2	3	4080	464	3	0	3	4320	505	4	1	-1	4320
342	1	1	0	480	383	2	-2	-1	2160	424	2	2	4	5760	465	3	0	4	6000	506	4	1	0	4080
343	1	1	1	720	384	2	-2	0	1920	425	2	3	-3	5280	466	3	1	-3	4560	507	4	1	1	4320
344	1	1	2	1440	385	2	-2	1	2160	426	2	3	-2	4080	467	3	1	-2	3360	508	4	1	2	5040
345	1	1	3	2640	386	2	-2	2	2880	427	2	3	-1	3360	468	3	1	-1	2640	509	4	2	-2	5760
346	1	1	4	4320	387	2	-2	3	4080	428	2	3	0	3120	469	3	1	0	2400	510	4	2	-1	5040
347	1	2	-4	5040	388	2	-2	4	5760	429	2	3	1	3360	470	3	1	1	2640	511	4	2	0	4800
348	1	2	-3	3360	389	2	-1	-4	5040	430	2	3	2	4080	471	3	1	2	3360	512	4	2	1	5040
349	1	2	-2	2160	390	2	-1	-3	3360	431	2	3	3	5280	472	3	1	3	4560	513	4	2	2	5760
350	1	2	-1	1440	391	2	-1	-2	2160	432	2	4	-2	5760	473	3	2	-3	5280	514	4	3	0	6000
351	1	2	0	1200	392	2	-1	-1	1440	433	2	4	-1	5040	474	3	2	-2	4080	515	5	0	0	6000

tableau C.1 – Liste des directions du gradient de diffusion et du facteur-b correspondant.

ANNEXE C. LISTE DES DIRECTIONS DU GRADIENT DE DIFFUSION

Bibliographie

- [1] Daniel C ALEXANDER.
« A general framework for experiment design in diffusion MRI and its application in measuring direct tissue-microstructure features. ».
Magnetic resonance in medicine, 60(2):439–48, août 2008.
- [2] Peter J BASSER, J MATTIELLO et D LEBIHAN.
« MR diffusion tensor spectroscopy and imaging. ».
Biophysical journal, 66(1):259–67, janvier 1994.
- [3] Amir BECK et Marc TEBoulLE.
« A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems ».
SIAM Journal on Imaging Sciences, 2(1):183, 2009.
- [4] Stephen BECKER, Jérôme BOBIN et Emmanuel J. CANDÈS.
« NESTA : A Fast and Accurate First-Order Method for Sparse Recovery ».
2009.
- [5] Kai Tobias BLOCK, Martin UECKER et Jens FRAHM.
« Undersampled radial MRI with multiple coils. Iterative image reconstruction using a total variation constraint. ».
Magnetic resonance in medicine, 57(6):1086–98, juin 2007.
- [6] P. T. CALLAGHAN.
Principles of nuclear magnetic resonance microscopy.
Oxford University Press, 1991.
- [7] E.J. CANDÈS et T. TAO.
« Decoding by Linear Programming ».
IEEE Transactions on Information Theory, 51(12):4203–4215, décembre 2005.
- [8] Emmanuel J. CANDÈS et Terence TAO.
« Near-Optimal Signal Recovery From Random Projections : Universal Encoding Strategies ? ».
IEEE Transactions on Information Theory, 52(12):5406–5425, décembre 2006.
- [9] Emmanuel J. CANDÈS et Michael B. WAKIN.
« 'People Hearing Without Listening :' An Introduction To Compressive Sam-

BIBLIOGRAPHIE

- ping ».
unpublished, 2007.
- [10] Scott Shaobing CHEN, David L. DONOHO et Michael A. SAUNDERS.
 « Atomic Decomposition by Basis Pursuit ».
SIAM Review, 43(1):129, 2001.
 - [11] Yoram COHEN et Yaniv ASSAF.
 « High b-value q-space analyzed diffusion-weighted MRS and MRI in neuronal tissues - a technical review. ».
NMR in biomedicine, 15(7-8):516–42.
 - [12] I. DAUBECHIES, M. DEFRISE et C. DE MOL.
 « An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint ».
Communications on Pure and Applied Mathematics, 57(11):1413–1457, novembre 2004.
 - [13] Maxime DESCOTEAUX.
 « *High Angular Resolution Diffusion MRI : from Local Estimation to Segmentation and Tractography* ».
 Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2008.
 - [14] Maxime DESCOTEAUX, Elaine ANGELINO, Shaun FITZGIBBONS et Rachid DERICHE.
 « Regularized, fast, and robust analytical Q-ball imaging. ».
Magnetic resonance in medicine, 58(3):497–510, septembre 2007.
 - [15] D.L. DONOHO.
 « Compressed sensing ».
IEEE Transactions on Information Theory, 52(4):1289–1306, avril 2006.
 - [16] Albert EINSTEIN.
Investigations on the Theory of the Brownian Movement.
 Dover Publications, 1956.
 - [17] E. Mark HAACKE, Robert W. BROWN, Michael R. THOMPSON et Ramesh VENKATESAN.
Magnetic Resonance Imaging : Physical Principles and Sequence Design.
 Wiley-Liss, 1999.
 - [18] Heidi JOHANSEN-BERG et Timothy E.J. BEHRENS.
Diffusion MRI : From quantitative measurement to in-vivo neuroanatomy.
 Academic Press, 1 édition, 2009.
 - [19] Lisa JONASSON, Xavier BRESSON, Jean-Philippe THIRAN, Van J WEDEEN et Patric HAGMANN.
 « Representing diffusion MRI in 5-D simplifies regularization and segmentation

BIBLIOGRAPHIE

- of white matter tracts. ».
IEEE transactions on medical imaging, 26(11):1547–54, novembre 2007.
- [20] Derek K. JONES.
Diffusion MRI : Theory, Methods, and Applications.
 Oxford University Press, 1 édition, 2010.
- [21] Bruno KASTLER, Daniel VETTER, Zoltán PATAY et Philippe GERMAIN.
Comprendre l'IRM : Manuel d'auto-apprentissage.
 Masson, 6e édition, 2006.
- [22] Seung-Jean KIM, Kwangmoo KOH, Michael LUSTIG et Stephen BOYD.
 « An Efficient Method for Compressed Sensing ».
 Dans *2007 IEEE International Conference on Image Processing*, pages III – 117–
 III – 120. IEEE, 2007.
- [23] N. LEE et M. SINGH.
 « Compressed Sensing based Diffusion Spectrum Imaging ».
ISMRM, 2010.
- [24] Malcolm H. LEVITT.
Spin Dynamics : Basics of Nuclear Magnetic Resonance.
 John Wiley & Sons, 2001.
- [25] Michael LUSTIG, David DONOHO et John M PAULY.
 « Sparse MRI : The application of compressed sensing for rapid MR imaging. ».
Magnetic resonance in medicine, 58(6):1182–95, décembre 2007.
- [26] Stéphane D. MALLAT.
A Wavelet Tour of Signal Processing : the sparse way.
 Academic Press, 3 édition, 1999.
- [27] Marion I. MENZEL, Ek T. TAN, Kedar KHARE, Jonathan I. SPERL, Kevin F.
 KING, Xiaodong TAO, Christopher J. HARDY et Luca MARINELLI.
 « Accelerated diffusion spectrum imaging in the human brain using compressed
 sensing ».
Magnetic Resonance in Medicine, page à paraître, août 2011.
- [28] Sylvain MERLET et Rachid DERICHE.
 « Compressed Sensing for Accelerated EAP Recovery in Diffusion MRI ».
MICCAI, 2010.
- [29] Oleg MICHAILOVICH, Yogesh RATHI et Sudipto DOLUI.
 « Spatially regularized compressed sensing for high angular resolution diffusion
 imaging. ».
IEEE transactions on medical imaging, 30(5):1100–15, mai 2011.
- [30] Dwight G. NISHIMURA.
Principles of Magnetic Resonance Imaging.
 Stanford Univ, 2010.

BIBLIOGRAPHIE

- [31] J. ROMBERG.
« Imaging via Compressive Sampling ».
IEEE Signal Processing Magazine, 25(2):14–20, mars 2008.
- [32] Etienne SAINT-AMANT et Maxime DESCOTEAUX.
« Sparsity Characterization of the Diffusion Propagator ».
ISMRM, 2011.
- [33] C.E. SHANNON.
« Communication in the Presence of Noise ».
Proceedings of the IRE, 37(1):10–21, janvier 1949.
- [34] E.O. STEJSKAL et J.E. TANNER.
« Spin diffusion measurements : spin echoes in the presence of a time-dependent field gradient. ».
Journal of Chemical Physics, 42:288–292, 1965.
- [35] David S. TUCH.
« *Diffusion MRI of Complex Tissue Structure* ».
Thèse de doctorat, Harvard University and Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [36] David S TUCH, Timothy G REESE, Mette R WIEGELL, Nikos MAKRIS, John W BELLIVEAU et Van J WEDEEN.
« High angular resolution diffusion imaging reveals intravoxel white matter fiber heterogeneity. ».
Magnetic resonance in medicine, 48(4):577–82, octobre 2002.
- [37] Van J WEDEEN, Patric HAGMANN, Wen-Yih Isaac TSENG, Timothy G REESE et Robert M WEISSKOFF.
« Mapping complex tissue architecture with diffusion spectrum magnetic resonance imaging. ».
Magnetic resonance in medicine, 54(6):1377–86, décembre 2005.
- [38] Van J. WEDEEN, Timothy G. REESE, David S. TUCH, Mette R. WIEGELL, J.-G. DOU, R.M. WEISSKOFF et D. CHESSLER.
« Mapping fiber orientation spectra in cerebral white matter with Fourier-transform diffusion MRI ».
Dans *Proceedings of the International Society of Magnetic Resonance in Medicine*, page 82. International Society for Magnetic Resonance in Medicine, 2000.
- [39] Jong Chul YE, Sungho TAK, Yeji HAN et Hyun Wook PARK.
« Projection reconstruction MR imaging using FOCUSS. ».
Magnetic resonance in medicine, 57(4):764–75, avril 2007.